Soluzioni 6-Am3

Dott. Laura Di Gregorio

5 aprile 2003

1.

a)
$$g'(t) = 2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} - 3t^2\mathbf{k}$$

$$g''(t) = 2\mathbf{j} - 6t\mathbf{k};$$

b) poiché $g(1) = (2, 1, -1)$ e $g'(1) = (2, 2, -3)$, per il teorema di composizione

$$h'(1) =< \nabla f(2, 1, -1), g'(1) >= (-3) \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) = -1.$$

2.

a) Calcoliamo le matrici jacobiane di f e g:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2xye^{x^2} & e^{x^2} \\ \cos(x+y) & \cos(x+y) \\ -y\sin(xy) & -x\sin(xy) \end{pmatrix}$$

$$\nabla g = \begin{pmatrix} 2xz & 0 & x^2 \\ 8x & e^y & 0 \\ -1 & 0 & 3z^2 \end{pmatrix}$$

b) $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, l'espressione analitica di h si ottiene sostituendo ad x, y, z nell'espressione di g, rispettivamente, le componenti di f; si ottiene:

$$h(x,y) = y^2 \cos(xy) e^{2x^2}\mathbf{i} + (4y^2 e^{2x^2} + e^{\sin(x+y)})\mathbf{j} + [(\cos(xy))^3 - ye^{x^2}]\mathbf{k}.$$

c) Occorre calcolare $\nabla f|_{(0,\pi)}$ e $\nabla g|_{(f(0,\pi))}$.

Si ha $f(0,\pi) = (\pi, 0, 1)$:

$$\nabla f|_{(0,\pi)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g|_{(\pi,0,1)} = \begin{pmatrix} 2\pi & 0 & \pi^2 \\ 8\pi & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

quindi per il teorema di composizione

$$\nabla h|_{(0,\pi)} = \nabla g|_{(\pi,0,1)} \cdot \nabla f|_{(0,\pi)} = \begin{pmatrix} 0 & 2\pi \\ -1 & 8\pi - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Siano $g(t) = (x(t), y(t))$ ed $f(t) = F(x(t), y(t))$, si ha

$$\begin{aligned}
f'(t) &= F_x(x,y)x'(t) + F_y(x,y)y'(t), \\
f''(t) &= [F_{xx}(x,y)x'(t) + F_{xy}(x,y)y'(t)]x'(t) + F_x(x,y)x''(t) \\
&\quad +[F_{yx}(x,y)x'(t) + F_{yy}(x,y)y'(t)]y'(t) + F_y(x,y)y''(t) \\
&= F_{xx}(x,y)x'(t)^2 + 2F_{xy}(x,y)y'(t)x'(t) + F_{yy}(x,y)y'(t)^2 \\
&\quad +F_x(x,y)x''(t) + F_y(x,y)y''(t).
\end{aligned}$$