Soluzioni 8-Am3

Dott. Laura Di Gregorio

9 maggio 2003

1. La funzione integranda è prolungabile con continuità sul compatto misurabile $\overline{D}$ (infatti per $y \to 0$ abbiamo che $\dfrac{\sin y^2}{y} \longrightarrow 0$) quindi è integrabile su D.

Integriamo prima rispetto ad x:

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{\sin y^2}{y}\,dxdy &= \int_0^{\sqrt{\pi}}\int_0^{y^2} \frac{\sin y^2}{y}\,dxdy = \int_0^{\sqrt{\pi}} y\sin y^2\,dy \\ &= \left[-\frac{1}{2}\cos y^2\right]_0^{\sqrt{\pi}} = 1.\end{aligned}$$

2. L'integrale esiste ed è nullo in quanto la funzione integranda è dispari rispetto alla bisettrice degli assi $y = x$, cioé

$$f(x,y) = -f(y,x)$$

ed il dominio d'integrazione è simmetrico rispetto alla bisettrice stessa.

3. La funzione integranda è continua su $\overline{S}$ e S è misurabile in quanto ∂S ha misura nulla quindi è integrabile su S.

$$\begin{aligned}\iiint_S \frac{1}{(y+1)^3}\,dxdydz &= \int_0^1\int_0^1\int_0^{x+z} \frac{1}{(y+1)^3}\,dydxdz \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 \left(\frac{1}{(x+z+1)^3} - 1\right)dxdz \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{1}{z+2} + \frac{1}{z+1} - 1\right)dz = \frac{1}{2}\log\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

4. Abbiamo che

$$z + \sqrt{x} \leq y \Longleftrightarrow y - z \geq 0 \quad \text{e} \quad x \leq (y-z)^2$$

dunque

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 0 \leq y \leq 1,\; 0 \leq z \leq y,\; 0 \leq x \leq (y-z)^2\}.$$

Applicando Fubini:

$$\begin{aligned}
\iiint_D \cdots &= \int_0^1 f(y)\left[\int_0^y \left(\int_0^{(y-z)^2} dx\right) dz\right] dy \\
&= \int_0^1 f(y)\left[\int_0^y (y-z)^2 dx\right] dy \\
&= \int_0^1 f(y)\left[y^2 z + \frac{z^3}{3} - yz^2\right]_0^y dy = \int_0^1 f(y)\frac{y^3}{3}\, dy.
\end{aligned}$$