Soluzioni II Esonero - AM3

Prof. Luigi Chierchia, Dott. Laura Di Gregorio

18 giugno 2003

4. E' evidente che il triangolo considerato è quello compreso tra i due assi cartesiani e la retta di equazione $x+y=1$ quindi l'integrale diventa

$$\begin{aligned}
\int_T (x+y)(2x-y)\,dx\,dy &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (x+y)(2x-y)\,dy\right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (2x^2+xy-y^2)\,dy\right) dx \\
&= \int_0^1 \left[2x^2(1-x) + x\frac{(1-x)^2}{2} - \frac{(1-x)^3}{3}\right] dx \\
&= \int_0^1 \frac{-7x^3+9x-2}{6}\,dx \\
&= \int_0^1 \left[-\frac{7}{24}+\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right] dx = \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

Per calcolare lo stesso integrale usando il cambio di variabili suggerito, vediamo come si trasforma il dominio d'integrazione

$$\begin{aligned}
x > 0 &\iff u+v>0 \iff v > -u \\
x < 1 &\iff u+v<3 \iff v < 3-u \\
y > 0 &\iff 2u-v>0 \iff v < 2u \\
y < 1-x &\iff u<1.
\end{aligned}$$

Si noti che

$$v > -u \Longrightarrow v < 3-u$$

quindi il dominio nelle nuove variabili è

$$\widehat{T} = \{(u,v): \ 0 < u < 1, \ -u < v < 2u\}.$$

Lo Jacobiano del cambio di variabile è

$$\left|\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \frac{1}{3}$$

e l'integrale diventa

$$\begin{aligned}
\int_T (x+y)(2x-y)\,dx\,dy &= \int_{\widehat{T}} uv \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv \\
&= \frac{1}{3}\int_{\widehat{T}} uv\,dudv \\
&= \frac{1}{3}\int_0^1 u\left(\int_{-u}^{2u} v\,dv\right) du \\
&= \frac{1}{6}\int_0^1 u\left[v^2\right]_{-u}^{2u} du \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 u^3\,du = \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

5. (i) E' facile verificare che

$$\mathrm{div}\overrightarrow{F} = 0$$

quindi dal teorema della divergenza, osservando che la normale esterna alla base della semisfera (il disco D) è $\vec{n} = (0,0,-1)$ abbiamo che

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\partial\Sigma} \overrightarrow{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma \\
&= \int_S \overrightarrow{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma + \int_D \overrightarrow{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma \\
&= \int_S \overrightarrow{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma - \int_D x^2 dxdy.
\end{aligned}$$

Passando in coordinate polari otteniamo

$$\int_D x^2 dxdy = \int_0^1\int_0^{2\pi} r^3\cos^2 t\,dtdr$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^3 \frac{(1-\cos 2t)}{2}\, dt dr \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

da cui segue ovviamente che

$$\int_S \overrightarrow{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma = \frac{\pi}{4}.$$

(ii) Calcoliamo

$$\int_{\gamma^+} \omega_F^1 = \int_{\gamma^+} y\, dx - y\, dy$$

parametrizzando il cerchio unitario $(x, y) = (\cos\theta, \sin\theta)$ con $\theta \in [0, 2\pi]$ si ha

$$
\begin{aligned}
\int_\gamma y\, dx - y\, dy &= \int_0^{2\pi} \sin\theta\, d(\cos\theta) - \sin\theta\, d(\sin\theta) \\
&= -\int_0^{2\pi} \left(\sin^2\theta + \sin\theta\cos\theta\right) d\theta \\
&= -\int_0^{2\pi} \sin^2\theta\, d\theta = -\pi.
\end{aligned}
$$

(iii) Il teorema di Stokes dice che

$$\int_{\gamma^+} \omega_F^1 = \int_S \overrightarrow{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma.$$

Abbiamo già calcolato il primo integrale

$$\int_{\gamma^+} \omega_F^1 = -\pi.$$

Dal teorema di Stokes segue che

$$\int_{\gamma^+} \omega_F^1 = \int_S' \overrightarrow{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma \qquad \forall S'$$

con S' superficie di cui γ è il bordo. Scegliendo $S' = D$ otteniamo:

$$\int_{\gamma^+} \omega_F^1 = \int_D \operatorname{rot} \overrightarrow{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma.$$

dove $\vec{n} = (0,0,1)$.
Basta calcolare, quindi, la terza componente del rotore di $\overrightarrow{F}$ ristretta al piano $z = 0$:

$$(\mathrm{rot}\overrightarrow{F})_3\Big|_{z=0} = 5x^4z^{100} - \frac{1}{1+z^2}\Big|_{z=0} = -1$$

e sostituendo nell'integrale si ottiene

$$\int_D \mathrm{rot}\overrightarrow{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma = -\int_D d\sigma = -\pi$$

e dunque il teorema di Stokes è verificato.

6. Parametrizzo la curva γ:

$$\begin{cases} x = t \\ y = \sin t \end{cases} \qquad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

L'integrale diventa

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t}{\tan t}\sqrt{1+\cos^2 t}\, dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t \sqrt{1+\cos^2 t}\, dt \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-2\sin t\cos t\sqrt{1+\cos^2 t}\right) dt \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{2}\frac{d}{dt}\left(1+\cos^2 t\right)^{3/2} dt \\
&= -\frac{1}{3}\left[\left(1+\cos^2 t\right)^{3/2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{8}-1}{3}.
\end{aligned}$$