Prova scritta di AM3 del 19/6/2003
Appello A e recupero esoneri

Recupero I esonero: esercizi da 1) a 5).
Recupero II esonero: esercizi da 6) a 10).
Appello A: esercizi 1), 3), 4), 6), 8), 10).
Motivare il lavoro svolto. Durante l'esame non è consentito l'uso di appunti, libri, calcolatrici.

1) Si enunci il teorema delle funzioni implicite in $\mathbb{R}^2$ e se ne discuta la dimostrazione basata sulla monotonia.

2) Sia $f(x,y) = 1 + y - x + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(x+y)$.
(i) Si dimostri che esiste un'unica funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(x, g(x)) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
[Suggerimento: per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ si dimostri che la funzione $y \to f(x_0, y)$ è strettamente monotona ...]
(ii) Si provi una disuguaglianza del tipo $x - a < g(x) < x + b$ con opportuni a e b.
(iii) Discutere la regolarità di g.
(iv) $f(1/2, -1/2) = 0$. Sapreste trovare altre soluzioni esplicite di $f(x,y) = 0$?

3) Trovare gli estremi superiori ed inferiori e dire se esistono minimi o massimi relativi della funzione $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ nella regione $A = \{x + y + z \geq 1\}$.

4) (i) Si dia la definizione di differenziabilità per funzioni da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ e si discuta le nozione di matrice jacobiana.
(ii) Sia $\Lambda = \operatorname{diag}(1, 2, ..., n)$ (ovvero la matrice $(n \times n)$ diagonale con autovalori $1, 2, ..., n$) e sia $\vec{v} = (1, ..., 1) \in \mathbb{R}^n$. Sia

$$\vec{f}(\vec{x}) = \Lambda\vec{x} + \vec{v}\operatorname{sen}|\vec{x}|^2 \ .$$

Si dimostri direttamente (cioè usando direttamente la definizione data al punto (i)) che $\vec{f}$ è differenziabile in $\vec{0}$.
(iii) Calcolare la jacobiana di $\vec{f}$ in $\vec{x} = \vec{0}$ e in $\vec{x} = \vec{v}$.
(iv) Dato $\varepsilon > 0$ trovare $\delta > 0$ tale che $|\vec{f}(\vec{x})| < \varepsilon$ se $|\vec{x}| < \delta$.

5) (i) Si enunci e si dimostri il teorema di esistenza ed unicità per equazioni differenziali ordinarie.
Dare una stima sul tempo di esistenza per il problema

$$\dot{\vec{x}} = 1 + |\vec{x}|^{100} \ , \qquad \vec{x}(0) = \vec{0} \ .$$

6) Verificare il teorema della divergenza per il campo $\vec{F}(x,y,z) = (xy, 0, 0)$ sul tetraedro

$$T = \{x + y + z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\} \ .$$

7) Calcolare l'area racchiusa dalla curva

$$\Big\{\vec{\varphi}(t) = \Big(t(t-1), t(t-1)(2t-1)\Big) : \ t \in [0,1]\Big\} \ .$$

[Suggerimento: si usi il teorema di Green.]

8) Calcolare il volume della regione $\{x - 1 \leq z \leq x^2 + 2y^2 : \ (x,y) \in B_1^2\}$, dove B_1^2 è il disco di raggio 1 in $\mathbb{R}^2$ centrato nell'origine.

9) (i) Sia ω una 1-forma su $A \subset \mathbb{R}^3$. Si dimostri che se $\int_\gamma \omega = 0$ per ogni curva chiusa (regolare a tratti) in A allora ω è esatta in A.
Si dia un esempio di 1-forma chiusa ma non esatta.

10) Si enunci il teorema del cambio di variabili in $\mathbb{R}^2$ (per funzioni continue) e lo si dimostri nel caso della trasformazione

$$\vec{\phi} : \ (x_1, x_2) \in [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \to (y_1, y_2) = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2) \ ,$$

dove α_1, α_2 sono numeri reali diversi da zero.