Tutorato XI (04/06/2003)

(Teorema della divergenza e teorema di Stokes (II))

Esercizio 1. Si consideri il dominio tridimensionale di $\mathbb{R}^3$, definito da

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \, , \, 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \right\} .$$

1. Si calcoli l'area della superficie ∂E;
2. si calcoli il flusso uscente del campo vettoriale $F(x, y, z) = (x, y, z)$ attraverso ∂E (direttamente senza utilizzare il teorema della divergenza);
3. usando il punto precedente, calcolare il volume di E.

Esercizio 2. Si consideri la 1-forma differenziale

$$\omega(x, y) = \frac{(y^3 - x^2 y) \, dx \; + \; (x^3 - y^2 x) \, dy}{(x^2 + y^2)^2} .$$

1. Dimostrare che ω è chiusa. Si può dedurre da ciò che ω è esatta? Perché?
2. Sia $\alpha > 0$ e sia $\gamma_\alpha = +\partial B_\alpha(0)$ (cioè una circonferenza di centro l'origine e raggio α, orientata positivamente). Calcolare
$$\int_{\gamma_\alpha} \omega \, .$$
3. $^{(*)}$ Sia ora γ una qualsiasi curva chiusa e semplice in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, che "*compia un giro intorno all'origine*". Mostrare che
$$\int_\gamma \omega \; = \; 0 \, .$$
4. Dedurre dai punti precedenti che ω è esatta e trovarne una primitiva.