Tutorato II (12/03/2003)

(Costanti di Lipschitz e spazi di Banach)

Esercizio 1. Trovare, se esiste, una costante $L > 0$ tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \qquad \forall\, x,\, y\, \in\, \Omega$$

con $x \in \mathbb{R}^n$ e f così definita (con $|\cdot|$ si intende la norma euclidea):

(i) $$f(x) = \left(\frac{1}{2 - |x|},\ \left| \sin \prod_{i=1}^{n} x_i \right| \right), \qquad \Omega = B_1(0)\,;$$

(ii) $$f(x) = \frac{1}{2 - |x|^{\frac{1}{2}}}, \qquad \Omega = B_1(x_0), \quad x_0 = (2, \ldots, 2)$$

oppure $x_0 = (0, \ldots, 0)$ (per il primo dominio dobbiamo supporre che $n \neq 3,\, 4,\, 5,\, 6$);

(iii) $$f(x) = e^{|x|^2} x\,, \qquad \Omega = B_r(0),\ r > 0\,.$$

Esercizio 2. Si consideri lo spazio di Banach $(\ell^1,\ \|\cdot\|_1)$.

(i) Si dimostri che l'insieme

$$\Omega := \{x \in \ell^1 : \quad \|x\|_1 \leq 1\}$$

non è compatto.

(ii) Dire se è compatto l'insieme

$$D := \{x \in \ell^1 :\ |x_k| \leq 1\ \ \forall\, k,\ \ x_k = 0\ \ \forall\, k > 10\}\,.$$