

Tutorato V (02/04/2003)

(Teorema della funzione implicita e della funzione inversa)

Esercizio 1. Sia

$$f(x, y) = |x|^2 + y^2 - 2x_1 + 4x_2 - 6y - 11$$

con $x \in \mathbb{R}^2$, $y \in \mathbb{R}$.

1. Quante soluzioni g di classe C^∞ in un intorno del punto $x_0 = (1, -2)$, esistono per l'equazione $f(x, g(x)) = 0$?
2. Si verifichi che se $g(x_0) > 0$ allora g ha un massimo relativo stretto in x_0 .

Esercizio 2.¹

Sia $v \in \mathbb{R}^n$ un vettore di norma minore o uguale a 1 e sia

$$f(x) \equiv x + v \sin |x|^2.$$

Si dica se f è invertibile in un intorno di $x = 0$ ed in caso affermativo si trovi un $r > 0$ tale che f^{-1} sia definita su $B_r(0)$.

Esercizio 3.

1. Dimostrare che in un intorno di $(0, 0)$ l'equazione

$$e^{x^2+y^2} - x^2 - 2y^2 + 2 \sin y = 1$$

definisce una funzione $y = f(x)$.

2. Dare una stima sull'intorno di definizione delle f .
3. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}.$$

¹Questo esercizio può essere formulato nella seguente maniera equivalente:
Sia $v \in \mathbb{R}^n$ un vettore di norma minore o uguale a 1 e sia

$$f(x) \equiv x + v \sin |x|^2.$$

Si dica se l'equazione

$$f(x) - y = 0$$

ammette una soluzione $x = g(y)$ in un intorno di $y = 0$ ed in caso affermativo si trovi un $r > 0$ tale che g sia definita su $B_r(0)$.