

Tutorato VIII (14/05/2003)

(Integrazione secondo Riemann in \mathbb{R}^n e cambi di variabile.)

Esercizio 1. Trovare il volume della regione interna al cilindro di equazione $x^2 + y^2 \leq 1$, compresa tra la superficie di equazione $z = x^2 + y^2 - 2$ ed il piano $x + y + z = 4$.

Esercizio 2. Sia

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, (x^2 + y^2)^2 \leq (x^2 - y^2)\}.$$

1. Descrivere E in coordinate polari (ed eventualmente disegnarlo).
2. Calcolare l'area di E .
3. Sia $k > 0$; trovare l'area dell'insieme

$$E_k \equiv \{(kx, ky) : (x, y) \in E\}.$$

4. Trovare il volume dell'insieme

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, (x^2 + y^2)^2 \leq (1 - z^2)(x^2 - y^2), |z| \leq 1\}.$$

Esercizio 3. Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\iint_{\mathcal{T}} x^2(y - x^3)e^{y+x^3} dx dy$$

dove:

$$\mathcal{T} \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 \leq y \leq 3, x \geq 1\}.$$

(Sugg.: Considerare il cambio di variabili $u = y - x^3$ e $v = y + x^3$)