

Tutorato IX (21/05/2003)

(Integrali curvilinei, superficiali e impropri)

Esercizio 1. Sia γ la curva in \mathbb{R}^2 , espressa (in coordinate polari) dalla condizione:

$$\rho = a(1 + \cos \theta) \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

Calcolarne la lunghezza al variare del parametro $a > 0$.
(Nota: Tale curva prende il nome di “*Cardioide*”.)

Esercizio 2. Calcolare l’area della superficie di un Toro tridimensionale \mathbb{T}^3 , avente raggi r e R (con $r < R$).

(Nota: Tale *toro* può essere visto come un insieme in \mathbb{R}^3 generato dalla rotazione completa intorno all’asse z (od intorno ad una qualsiasi altra retta) di un cerchio di raggio r che giace su un piano contenente l’asse z e tale che la distanza del centro del cerchio dall’asse sia uguale ad $R > r$.)

Esercizio 3. Si dica per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ e $p > 0$, la funzione z^α è integrabile su

$$F_p \equiv \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < 1, x^2 + y^2 \leq z^{2p}\},$$

e per tali valori calcolare

$$\iiint_{F_p} z^\alpha dx dy dz.$$