Soluzioni 10-Am3

Dott. Laura Di Gregorio

21 maggio 2003

1. Il dominio di integrazione è illimitato. Se $\alpha > 0$ ho problemi nell'origine mentre se $\alpha \leq 0$ ho problemi all'infinito.
Integro questa funzione su un dominio del tipo

$$\mathcal{D}_\varepsilon = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq \frac{1}{\varepsilon^2},\ x^2+y^2 \geq \varepsilon^2\right\}.$$

A questo punto passo in coordinate polari

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

Il dominio diventa

$$\mathcal{D}_\varepsilon = \left\{(\rho,\theta) \,:\, \varepsilon \leq \rho \leq \frac{1}{\varepsilon},\, \varepsilon < 1\ \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right\}.$$

Considero il caso $\alpha \neq 1$:

$$\begin{aligned} \iint_{D_\varepsilon} \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}\, dxdy &= \int_\varepsilon^{\frac{1}{\varepsilon}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\rho^{2\alpha}}\,\rho\, d\theta\, d\rho \\ &= \frac{\pi}{2}\int_\varepsilon^{\frac{1}{\varepsilon}} \rho^{1-2\alpha}\, d\rho \\ &= \frac{\pi}{4(1-\alpha)}\left(\frac{1}{\varepsilon^{2-2\alpha}} - \varepsilon^{2-2\alpha}\right). \end{aligned}$$

E' chiaro che

$$\frac{1}{\varepsilon^{2-2\alpha}} - \varepsilon^{2-2\alpha} \longrightarrow \infty$$

per $\varepsilon \to 0$.

Nel caso $\alpha = 1$:

$$\begin{aligned}\iint_{D_\varepsilon} \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}\,dxdy &= \int_\varepsilon^{\frac{1}{\varepsilon}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\rho} d\rho \\ &= \frac{\pi}{2}\left(\log\frac{1}{\varepsilon} - \log\varepsilon\right) \longrightarrow +\infty\end{aligned}$$

per $\varepsilon \to 0$.

La funzione data non è integrabile su quel dominio.

2. Procediamo in modo analogo all'esercizio precedente: la funzione integranda è singolare nell'origine quindi considero il seguente dominio

$$\mathcal{D}_\varepsilon = \{x^2+y^2 \geq \varepsilon^2\} \cap \mathcal{D}.$$

Facendo di nuovo il cambio di coordinate

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

Il dominio diventa

$$\mathcal{D}_\varepsilon = \big\{(\rho,\theta) : \varepsilon \leq \rho \leq 1,\ \theta \in [0, 2\pi]\big\}.$$

Dunque otteniamo

$$\begin{aligned}\iint_{D_\varepsilon} \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}\,dxdy &= \int_\varepsilon^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho^{2\alpha}}\,\rho\,d\theta\,d\rho \\ &= 2\pi \int_\varepsilon^{\frac{1}{\varepsilon}} \rho^{1-2\alpha}\,d\rho \\ &= \frac{\pi}{1-\alpha}\Big[-\varepsilon^{2-2\alpha}+1\Big] \longrightarrow 0\end{aligned}$$

per $\varepsilon \to 0$ se $\alpha < 1$.
Quindi la funzione data è integrabile per $\alpha < 1$ e l'integrale è 0.

3. Analogamente al caso precedente consideriamo il dominio

$$\mathcal{D}_{\mathcal{R}} = \{x^2 + y^2 \leq R^2\} \cap \mathcal{D}$$

perché questa volta la singolarità è all'infinito.
Il dominio diventa

$$\mathcal{D}_{\mathcal{R}} = \Big\{(\rho, \theta) : \, 1 \leq \rho \leq R, \, \theta \in [0, 2\pi]\Big\}.$$

Dunque otteniamo

$$\iint_{D_\varepsilon} \frac{1}{(x^2 + y^2)^\alpha} \, dxdy \quad = \quad \int_1^R \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho^{2\alpha - 1}} \, d\theta \, d\rho.$$

Dunque

$$\lim_{R \to \infty} \int_1^R \frac{1}{\rho^{2\alpha - 1}} \, d\rho \quad = \quad \lim_{R \to \infty} \left[\frac{R^{2-2\alpha}}{2 - 2\alpha} - \frac{1}{2 - 2\alpha}\right] < \infty$$

se $\alpha > 1$.
Quindi la funzione data è integrabile se $\alpha > 1$.