Tutorato I (05/03/2003)
(Funzioni continue e spazi di Banach)

Esercizio 1.
Nota: In tale contesto $|\cdot|$ indica la norma euclidea, sia su $\mathbb{R}^4$ che su $\mathbb{R}^2$. Utilizzando le relazioni di equivalenza fra le varie norme si possono ottenere immediatamente i moduli di continuità associati alle altre combinazioni di norme definibili su tali spazi.

Trovare il modulo di continuità in $x_0 = (0,0,0,0)$, equivale a trovare un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che se $|x| \leq \delta$, allora

$$|f(x) - f(0)| = \left| \left(\frac{1}{1+|x|} - 1,\ \sin(x_1 x_4) \right) \right| \leq \varepsilon\,.$$

Cominciamo stimando separatamente le varie componenti di questo vettore.

- Prima componente:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{1+|x|} - 1 \right| &= \left| \frac{1-1-|x|}{1+|x|} \right| = \\ &= \frac{|x|}{1+|x|} \leq \\ &\leq |x| \leq \delta\,. \end{aligned}$$

- Seconda componente:

$$|\sin(x_1 x_4)| \leq |x_1 x_4| \leq |x|^2 \leq \delta^2\,;$$

  abbiamo usato che $|\sin t| \leq |t|$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e che $|x_i| \leq |x|$ per ogni $i = 1,2,3,4$.

  Mettendo insieme le varie stime otteniamo:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(0)| &= \left| \left(\frac{1}{1+|x|} - 1,\ \sin(x_1 x_4) \right) \right| \leq \\ &\leq \sqrt{2} \max \left\{ \left| \frac{1}{1+|x|} - 1 \right|,\ |\sin(x_1 x_4)| \right\} \leq \\ &\leq \sqrt{2} \max \left\{ \delta,\ \delta^2 \right\}\,. \end{aligned}$$

Assumendo che $\delta \leq 1$ possiamo semplificare tale espressione:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(0)| &\leq \sqrt{2} \max \left\{ \delta,\ \delta^2 \right\} = \\ &= \sqrt{2}\delta\,. \end{aligned}$$

Quindi sarà sufficiente prendere

$$\delta(\varepsilon) = \min \left\{ \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}},\ 1 \right\}\,.$$

Esercizio 2. Consideriamo una funzione

$$f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

tale che $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ e sia $x_0 \in E$. Vogliamo mostrare che

$$f \text{ è continua in } x_0 \quad \Longleftrightarrow \quad f_i \text{ è continua in } x_0 \quad \forall\, i = 1, \dots, m\,.$$

Dimostriamo separatamente le due implicazioni. Osserviamo che anche in questo caso considereremo la norma euclidea su entrambi gli spazi: questa non è una scelta restrittiva in quanto le norme su spazi vettoriali di dimensione finita sono tra loro equivalenti (cioè inducono la stessa topologia) e quindi le proprietà topologiche (quali la continuità) non dipendono dalle norme scelte.

($\Longrightarrow$) Supponiamo che f sia continua in x_0, cioè

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \,: \quad |x - x_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\,.$$

Quindi è sufficiente osservare che per ogni $i = 1, \dots, m$

$$|f_i(x) - f_i(x_0)| \leq |f(x) - f(x_0)|$$

per poter concludere la tesi.

($\Longleftarrow$) Assumiamo che per ogni $i = 1, \dots, m$ le funzioni f_i siano continue in x_0, cioè

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta_i = \delta_i(\varepsilon) > 0 \,: \quad |x - x_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f_i(x) - f_i(x_0)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}\,.$$

La tesi segue facilmente prendendo

$$\delta = \delta(\varepsilon) = \min\{\delta_1(\varepsilon), \dots, \delta_m(\varepsilon)\}\,;$$

infatti con tale scelta si ha che se $|x - x_0| \leq \delta$, allora

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0| \quad &\leq \quad \sqrt{m} \max_{i=1,\dots,m} \{|f_i(x) - f_i(x_0)|\} \leq \\ &\leq \quad \sqrt{m}\frac{\varepsilon}{\sqrt{m}} = \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Esercizio 3. Cominciamo col mostrare che l'applicazione

$$\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}} : \quad \mathrm{Lip}(E, \mathbb{R}^m) \longrightarrow \mathbb{R}$$

è una norma su tale spazio.

- Chiaramente $\|f\|_{\mathrm{Lip}} \geq 0$ per ogni $f \in \mathrm{Lip}(E, \mathbb{R}^m)$. Inoltre

$$\begin{aligned} \|f\|_{\mathrm{Lip}} = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \sup_{x \in E} |f(x)| = 0 \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \quad f(x) = 0 \quad \forall\, x \in E. \end{aligned}$$

  Quindi abbiamo mostrato la *positività* e la *non degenerazione*.

- Mostriamo l'*omogeneità*. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ si ha:

$$\begin{aligned}
\|af\|_{\mathrm{Lip}} &= \sup_{\substack{x,y\in E\\ x\neq y}} \frac{|af(x)-af(y)|}{|x-y|} + \sup_{x\in E}|af(x)| = \\
&= |a| \sup_{\substack{x,y\in E\\ x\neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} + |a|\sup_{x\in E}|f(x)| = \\
&= |a|\,\|f\|_{\mathrm{Lip}}\,.
\end{aligned}$$

- Infine, facciamo vedere che vale la *disuguaglianza triangolare*. Siano f e g due funzioni in $\mathrm{Lip}(E,\mathbb{R}^m)$. Osserviamo in via preliminare che

$$\begin{aligned}
\frac{|(f(x)+g(x))-(f(y)+g(y))|}{|x-y|} &\leq \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} + \\
&+ \frac{|g(x)-g(y)|}{|x-y|}\,.
\end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_{\mathrm{Lip}} &= \sup_{\substack{x,y\in E\\ x\neq y}} \frac{|(f(x)+g(x))-(f(y)+g(y)|}{|x-y|} + \\
&+ \sup_{x\in E}|f(x)+g(x)| \leq \\
&\leq \sup_{\substack{x,y\in E\\ x\neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} + \sup_{x\in E}|f(x)| + \\
&+ \sup_{\substack{x,y\in E\\ x\neq y}} \frac{|g(x)-g(y)|}{|x-y|} + \sup_{x\in E}|g(x)| = \\
&= \|f\|_{\mathrm{Lip}} + \|g\|_{\mathrm{Lip}}\,.
\end{aligned}$$

Abbiamo appena mostrato che $(\mathrm{Lip}(E,\mathbb{R}^m),\ \|f\|_{\mathrm{Lip}})$ è uno spazio normato. Ci manca da mostrare che è completo, cioè che ogni successione di Cauchy (rispetto alla norma sopra definita) converge ad un elemento nello spazio. Consideriamo $\{f_k\}_k$ una successione di Cauchy, cioè per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $N_0 = N_0(\varepsilon) > 0$ tale che per ogni k, $h > N_0$ si abbia:

$$\begin{aligned}
\|f_k - f_h\|_{\mathrm{Lip}} &= \sup_{\substack{x,y\in E\\ x\neq y}} \frac{|(f_k(x)-f_h(x))-(f_k(y)-f_h(y))|}{|x-y|} + \\
&+ \sup_{x\in E}|f_k(x)-f_h(x)| \leq \varepsilon\,. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Quindi la successione $\{f_k\}_k$ è una successione di Cauchy in[1]

$$(C(E,\mathbb{R}^m),\ \|\cdot\|_{\infty,E})$$

[1] Denoteremo con $\|\cdot\|_{\infty,E}$ la *norma del sup*, cioè per ogni $f \in C(E,\mathbb{R}^m)$ intenderemo

$$\|f\|_{\infty,E} \equiv \sup_{x\in E}|f(x)|\,.$$

e di conseguenza (poichè tale spazio è completo) ammette un limite $f \in C(E, \mathbb{R}^m)$, cioè esiste un $N_1 = N_1(\varepsilon) > 0$ tale che se $k > N_1$ allora

$$\|f_k - f\|_{\infty,E} \leq \varepsilon\,.$$

Da (1) ricaviamo che se $x,\, y \in E$ con $x \neq y$ e $k,\, h > N_0$ allora

$$\frac{|(f_k(x) - f_h(x)) - (f_k(y) - f_h(y))|}{|x-y|} \leq \varepsilon$$

da cui, passando al limite per $h \to +\infty$, otteniamo:

$$\frac{|(f_k(x) - f(x)) - (f_k(y) - f(y))|}{|x-y|} \leq \varepsilon\,.$$

Poiché ciò è vero per ogni $x,\, y \in E$ possiamo concludere che se $k > N_0$ allora

$$\sup_{\substack{x,y\in E\\ x\neq y}} \frac{|(f_k(x) - f(x)) - (f_k(y) - f(y))|}{|x-y|} \leq \varepsilon\,.$$

Mettendo insieme le stime ottenute e definendo $N = N(\varepsilon) = \max\{N_0(\varepsilon), N_1(\varepsilon)\}$, otteniamo che per $k > N$

$$\|f_k - f\|_{\mathrm{Lip}} \leq 2\varepsilon$$

cioè f è il limite di tale successione rispetto alla norma $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}}$.
Per concludere la dimostrazione, ci manca da mostrare che $f \in \mathrm{Lip}(E, \mathbb{R}^m)$. Infatti, fissando $k > N$ si ha:

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}} \leq \|f - f_k\|_{\mathrm{Lip}} + \|f_k\|_{\mathrm{Lip}} < \infty.$$

Esercizio 4.
Nota: Denoteremo con x gli elementi di $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, cioè le successioni a valori reali $x = \{x_n\}_n$. Con il pedice indicheremo un elemento di una di queste successioni, mentre useremo l'apice per indicare gli elementi di una successione in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (ad esempio $\{x^{(k)}\}$ indica una successione i cui elementi $x^{(k)}$ sono delle successioni, cioè $x^{(k)} = \{x_n^{(k)}\}_n$).

1. Cominciamo col considerare lo spazio $(\ell^1,\ \|\cdot\|_1)$. Mostriamo che l'applicazione

$$\begin{array}{rcl} \|\cdot\|_1 : \ell^1 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \|x\|_1 \equiv \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \end{array}$$

   è una norma su tale spazio.

   - Chiaramente $\|x\|_1 \geq 0$ per ogni $x \in \ell^1$. Inoltre

   $$\begin{aligned} \|x\|_1 = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n| = 0 \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \quad x_n = 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

     Quindi abbiamo mostrato la *positività* e la *non degenerazione.*

- Mostriamo l'*omogeneità*. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ si ha:

$$\begin{aligned} \|ax\|_1 &= \sum_{n\in\mathbb{N}} |ax_n| = \\ &= |a| \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n| = |a|\, \|x\|_1 \,. \end{aligned}$$

- Infine, facciamo vedere che vale la *disuguaglianza triangolare*. Siano x e y due successioni in ℓ^1. Allora:

$$\begin{aligned} \|x+y\|_1 &= \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n + y_n| \leq \\ &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} (|x_n| + |y_n|) = \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n| + \sum_{n\in\mathbb{N}} |y_n| = \\ &= \|x\|_1 + \|y\|_1 \,. \end{aligned}$$

  Osserviamo che il poter separare le due serie è giustificato dal fatto che queste convergono entrambe assolutamente.

Dobbiamo mostrare ora che tale spazio è completo. Sia $\{x^{(k)}\}$ una successione di Cauchy in ℓ^1, cioè per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $N_0 = N_0(\varepsilon) > 0$ tale che se k, $h > N_0$ allora

$$\|x^{(k)} - x^{(h)}\|_1 \equiv \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n^{(k)} - x_n^{(h)}| \leq \varepsilon \,. \tag{2}$$

Ma quindi per ogni $n \in \mathbb{N}$ fissato, si ha

$$|x_n^{(k)} - x_n^{(h)}| \leq \varepsilon$$

e di conseguenza la successione $\{x_n^{(k)}\}_k$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{R}$ e quindi ammette un limite (per k che tende a $+\infty$) che indicheremo con x_n. Possiamo quindi considerare la successione dei limiti

$$x = \{x_n\}_n \,.$$

Mostriamo che x è il limite della successione $\{x^{(k)}\}_k$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_1$.
Osserviamo che da (2) si ha che per ogni $M > 0$ e per k, $h > N_0$

$$\sum_{n=0}^{M} |x_n^{(k)} - x_n^{(h)}| \leq \varepsilon \,;$$

passando al limite per $h \to +\infty$ otteniamo:

$$\sum_{n=0}^{M} |x_n^{(k)} - x_n| \leq \varepsilon$$

e, vista l'arbitrarietà di M, possiamo concludere che

$$\varepsilon \geq \sum_{n=0}^{\infty} |x_n^{(k)} - x_n| = \|x^{(k)} - x\|_1$$

che è quanto volevamo mostrare. Per completare la dimostrazione, osserviamo che $x \in \ell^1$; infatti, se fissiamo un $k > N_0$ otteniamo:

$$\|x\|_1 \leq \|x - x^{(k)}\|_1 + \|x^{(k)}\|_1 < \infty.$$

Si procede in maniera analoga per dimostrare che $(\ell^\infty,\ \|\cdot\|_\infty)$ è uno spazio di Banach.

2. Se $x \in \ell^1$ allora $\|x\|_\infty < \infty$ (altrimenti la serie $\sum_n |x_n|$ non potrebbe convergere!) e quindi $x \in \ell^\infty$. Abbiamo appena mostrato che

$$\ell^1 \subseteq \ell^\infty \ ;$$

d'altronde tale inclusione è stretta (cioè si tratta di un sottoinsieme proprio) come si verifica facilmente prendendo la successione

$$\tilde{x} = \{1, 1, \ldots, 1, \ldots\} \, ;$$

infatti tale successione ha norma $\|\tilde{x}\|_\infty = 1$ ma $\|\tilde{x}\|_1 = \infty$. Per mostrare che non si tratta di sottoinsieme chiuso, facciamo vedere che esiste una successione in ℓ^1 che converge (rispetto alla norma $\|\cdot\|_\infty$) ad un elemeno che non sta in ℓ^1. Definiamo

$$x^{(k)} = \left\{1, 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{k}, 0, \ldots\right\}$$

e consideriamo la successione $\{x^{(k)}\}_k$. Questa successione ammette un limite rispetto alla norma $\|\cdot\|_\infty$ e tale limite è dato da

$$x = \left\{1, 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{k}, \ldots\right\} .$$

Infatti

$$\|x^{(k)} - x\|_\infty = \frac{1}{k+1} \stackrel{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Osserviamo che $\|x\|_1 = \infty$ (è la serie armonica!) e questo completa la nostra dimostrazione.

3. Abbiamo appena mostrato che ℓ^1 non è un sottospazio chiuso di

$$(\ell^\infty,\ \|\cdot\|_\infty),$$

cioè rispetto alla topologia indotta da tale norma. Vogliamo determinare la chiusura di ℓ^1 (che indicheremo con $\overline{\ell^1}$) rispetto a tale topologia, cioè il più piccolo chiuso che lo contiene. Per far questo aggiungeremo a ℓ^1 tutti i suoi punti di accumulazione (abbiamo infatti visto nel punto precedente che esistono punti di accumulazione che sono esterni ad ℓ^1). Osserviamo che le successioni in ℓ^1 godono della proprietà di avere limite nullo (questa è infatti la condizione necessaria per la convergenza della serie $\sum_n |x_n|$); questa condizione è necessaria ma non sufficiente per stare in ℓ^1 (vedere il punto precedente). Quindi quello che ci si può aspettare è che l'insieme

$$\mathcal{C} \equiv \left\{ x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \quad \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \right\}$$

sia proprio l'insieme che stavamo cercando.
Mostreremo i seguenti fatti:

a. $\mathcal{C}$ è chiuso ;

b. per ogni $x \in \mathcal{C}$ esiste una successione $\{x^{(k)}\} \subset \ell^1$ che converge a x nella norma $\|\cdot\|_\infty$.

Osserviamo che il punto b ci dice proprio che si tratta del più piccolo chiuso contenente ℓ^1; infatti afferma che ogni punto di $\mathcal{C}$ è punto di accumulazione per ℓ^1, e quindi non può esistere un chiuso più piccolo che lo contenga. Diamo uno *sketch* della dimostrazione di questi punti.

a. Per mostrare che è chiuso, facciamo vedere che $\mathcal{C}$ contiene tutti i suoi punti di accumulazione. Sia $\{x^{(k)}\}_k \subset \mathcal{C}$ una successione convergente e sia x il suo limite. Per ogni $\varepsilon > 0$ esisterà $N_0 = N_0(\varepsilon) > 0$ tale che

   $$\|x^{(k)} - x\|_\infty \leq \varepsilon$$

   per ogni $k > N_0$. Allora:

   $$\begin{aligned} |x_n| &\leq |x_n - x_n^{(k)}| + |x_n^{(k)}| \leq \\ &\leq \|x^{(k)} - x\|_\infty + |x_n^{(k)}| \leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

   per n sufficientemente grande (in quanto $x_n^{(k)} \to 0$). Dall' arbitrarietà di ε otteniamo

   $$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in \mathcal{C}\,.$$

b. Per mostrare questo punto si procede esattamente come abbiamo fatto nel punto 2. Data una successione $x \in \mathcal{C}$, costruiamo la successione $\{x^{(k)}\}$ così definita:

   $$x^{(k)} = \{x_0, x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots\}\,.$$

   Chiaramente $\{x^{(k)}\} \subset \ell^1$. Mostriamo ora che x è il limite di tale successione rispetto alla norma $\|\cdot\|_\infty$. Poiché $x_n \to 0$, per ogni $\varepsilon > 0$ esisterà un $N_0 = N_0(\varepsilon)$ tale che

   $$|x_n| \leq \varepsilon$$

   per ogni $n \geq N_0$. Quindi, prendendo $k \geq N_0$ si avrà

   $$\|x^{(k)} - x\|_\infty \leq \varepsilon$$

   e questo conclude la dimostrazione.