Tutorato XI (04/06/2003)
(Teorema della divergenza e teorema di Stokes (II))

Esercizio 1. Innanzitutto cerchiamo di capire com'è fatto il nostro dominio E. I punti in E devono soddisfare due condizioni:

- $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$: cioè devono stare internamente alla sfera di centro l'origine e raggio 1;
- $0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$: si deve quindi avere $z \geq 0$ (e quindi stiamo considerando solamente i punti nell'*emisfero* superiore), ed inoltre affinché sia soddisfatta la seconda condizione tali punti dovranno essere esterni al cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (è un cono circolare retto, con vertice nell'origine e asse coincidente con l'asse z).

Rappresentiamo tale dominio in coordinate sferiche (ρ, φ, θ). Ricordiamo che le coordinate sferiche sono così definite: se $P = (x, y, z)$ è un punto diverso dall'origine, avremo:

$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \, , \end{cases}$$

dove abbiamo indicato con

ρ la distanza di P dall'origine (cioè il modulo del vettore $\overrightarrow{OP}$);

φ l'angolo che l'asse individuato dal vettore $\overrightarrow{OP}$ forma con l'asse delle z; quindi φ assumerà valori compresi tra 0 e π (osserviamo che in un certo senso rappresenta una sorta di *latitudine* geografica);

θ l'angolo che la proiezione del vettore $\overrightarrow{OP}$ sul piano xy, forma con l'asse delle x; quindi θ assumerà valori compresi tra 0 e 2π (osserviamo che rappresenta proprio la *longitudine* geografica).

Traduciamo le condizioni che identificano il nostro dominio, nelle nuove coordinate:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 &\iff 0 < \rho \leq 1 \\ z \geq 0 &\iff 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ z \leq \sqrt{x^2 + y^2} &\iff \cos\varphi \leq \sqrt{\sin^2\varphi} = |\sin\varphi| = \sin\varphi \quad (0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}) \\ &\iff \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \, . \end{aligned}$$

Quindi (in tale coordinate) il nostro dominio diventerà:

$$E = \left\{(r, \varphi, \theta) : \; 0 < \rho \leq 1, \; \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \; 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\} .$$

Cerchiamo ora di rispondere ai vari quesiti proposti.

1. Cominciamo con l'osservare che la superficie ∂E può essere vista come unione di tre superfici regolari date rispettivamente dalla base della semisfera (che indicheremo con ∂E_1), dalla porzione di superficie sferica (che indicheremo con ∂E_2) e dalla superficie *interna* del cono (che indicheremo con ∂E_3).
   Calcoliamo separatamente l'area di ciascuna di queste componenti.

   ∂E_1: tale superficie è un cerchio di raggio 1 e centro l'origine, contenuto nel piano xy; quindi la sua area è nota (cioè π). Volendo procedere *pedantemente*, dovremmo trovare una parametrizzazione di tale superficie e calcolare il relativo integrale di superficie, ottenendo lo stesso risultato. Infatti, una parametrizzazione per ∂E_1 è data da:

   $$\Psi^1(u, v) = \begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ z = 0 \end{cases}$$

   con $0 < u < 1$ e $0 < v < 2\pi$; inoltre:

   $$\begin{aligned} \Psi^1_u \wedge \Psi^1_v &= \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u \sin v & u \cos v & 0 \end{vmatrix} = \\ &= (0, 0, u) . \end{aligned}$$

   Quindi:

   $$\begin{aligned} \text{Area}\,(\partial E_1) &= \int_{\partial E_1} d\sigma = \\ &= \int_0^1 du \int_0^{2\pi} \left\| \Psi^1_u \wedge \Psi^1_v \right\| \, dv = \\ &= \int_0^1 du \int_0^{2\pi} u \, dv = \\ &= 2\pi \int_0^1 u \, du = \\ &= \pi . \end{aligned}$$

∂E_2: tale superficie è la porzione di calotta sferica (di raggio 1 e centro l'origine), avente $\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Una parametrizzazione per ∂E_2 è data da:

$$\Psi^2(u,v) \;=\; \begin{cases} x = \sin u \cos v \\ y = \sin u \sin v \\ z = \cos u \end{cases}$$

con $\frac{\pi}{4} < u < \frac{\pi}{2}$ e $0 < v < 2\pi$; inoltre:

$$\begin{aligned} \Psi^2_u \wedge \Psi^2_v &= \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \cos u \cos v & \cos u \sin v & -\sin u \\ -\sin u \sin v & \sin u \cos v & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \left(\sin^2 u \cos v,\, \sin^2 u \sin v,\, \sin u \cos u\right). \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \text{Area}\,(\partial E_2) &= \int_{\partial E_2} d\sigma = \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} du \int_0^{2\pi} \left\|\Psi^2_u \wedge \Psi^2_v\right\| \, dv = \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} du \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^4 u + \sin^2 u \cos^2 u}\, dv = \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} du \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 u \sin^2 u + \sin^2 u \cos^2 u}\, dv = \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} du \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 u}\, dv = \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} du \int_0^{2\pi} |\sin u|\, dv = \\ &= 2\pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin u|\, du = \\ &= 2\pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin u\, du = \\ &= 2\pi \left[-\cos u\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \sqrt{2}\,\pi\,. \end{aligned}$$

∂E_3: tale superficie è la superficie *interna* del cono. Troviamo il raggio di base e l'altezza di tale cono (questi saranno ovviamente uguali):

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ z=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+y^2+(\sqrt{x^2+y^2})^2=1 \\ z^2=x^2+y^2 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x^2+y^2=\frac{1}{2} \\ z=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x^2+y^2=\frac{1}{2} \\ z=\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

quindi l'altezza del cono e il raggio di base sono $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
Una parametrizzazione per ∂E_3 sarà data da:

$$\Psi^3(u,v) = \begin{cases} x=u\cos v \\ y=u\sin v \\ z=u \end{cases}$$

con $0<u<\frac{1}{\sqrt{2}}$ e $0<v<2\pi$; inoltre:

$$\begin{aligned} \Psi^3_u \wedge \Psi^3_v &= \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \cos v & \sin v & 1 \\ -u\sin v & u\cos v & 0 \end{vmatrix} = \\ &= (-u\cos v,\ -u\sin v,\ u)\,. \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \text{Area}\,(\partial E_3) &= \int_{\partial E_3} d\sigma = \\ &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} du \int_0^{2\pi} \left\|\Psi^3_u \wedge \Psi^3_v\right\| \, dv = \\ &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} du \int_0^{2\pi} \sqrt{u^2\cos^2 v + u^2\sin^2 v + u^2}\, dv = \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} du \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\, u\, dv = \\ &= 2\sqrt{2}\,\pi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} u\, du = \\ &= \sqrt{2}\,\pi\, \left[u^2\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \\ &= \sqrt{2}\,\frac{\pi}{2} = \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2}}\,. \end{aligned}$$

In conclusione l'area totale di ∂E è:

$$\begin{aligned}
\text{Area}\,(\partial E) &= \text{Area}\,(\partial E_1) + \text{Area}\,(\partial E_2) + \text{Area}\,(\partial E_3) = \\
&= \pi + \sqrt{2}\,\pi + \frac{\pi}{\sqrt{2}} = \\
&= \frac{3+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\,\pi\,.
\end{aligned}$$

2. Calcoliamo ora il flusso esterno del campo $F(x,y,z) = (x,y,z)$ (è diretto radialmente) attraverso la superficie ∂E (che indicheremo con $\Phi_F^+(\partial E)$). Per la linearità dell'operatore *flusso* si ha:

$$\begin{aligned}
\Phi_F^+(\partial E) &= \Phi_F^+(\partial E_1 \cup \partial E_2 \cup \partial E_3) = \\
&= \Phi_F^+(\partial E_1) + \Phi_F^+(\partial E_2) + \Phi_F^+(\partial E_3)\,;
\end{aligned}$$

calcoliamo quindi separatamente i vari flussi.
(Nota: continueremo ad usare le stesse notazioni e parametrizzazioni introdotte nel punto precedente.)

$\Phi_F^+(\partial E_1)$: Osserviamo che un versore normale alla superficie è dato da:[1]

$$\begin{aligned}
\frac{\Psi_u^1 \wedge \Psi_v^1}{\|\Psi_u^1 \wedge \Psi_v^1\|} &= \frac{1}{u}\,(0,0,u) = \\
&= (0,0,1)\,.
\end{aligned}$$

Tale versore non è diretto esternamente alla superficie (ma internamente, come si verifica facilmente), di conseguenza dovremmo considerare il versone opposto $\hat{n}_1 = (0,0,-1)$. Quindi:

$$\begin{aligned}
\Phi_F^+(\partial E_1) &= \int_{\partial E_1} F \cdot \hat{n}_1 \, d\sigma = \\
&= \int_{\partial E_1} (x,y,z) \cdot (0,0,-1)\, d\sigma = \\
&= -\int_{\partial E_1} z\, d\sigma = \\
&= 0\,,
\end{aligned}$$

in quanto la z è identicamente nulla su ∂E_1.

[1] Tale risultato si poteva ottenere anche osservando che la superficie ∂E_1 è interamente contenuta nel piano xy e di conseguenza la sua direzione normale è individuata dall'asse z.

$\Phi_F^+(\partial E_2)$: Osserviamo che un versore normale alla superficie è dato da:

$$\begin{aligned}\frac{\Psi_u^2 \wedge \Psi_v^2}{\|\Psi_u^2 \wedge \Psi_v^2\|} &= \frac{1}{\sin u}\left(\sin^2 u \cos v,\, \sin^2 u \sin v,\, \sin u \cos u\right) = \\ &= \left(\sin u \cos v,\, \sin u \sin v,\, \cos u\right),\end{aligned}$$

che è proprio diretto nella direzione radiale (in quanto in una sfera in raggio è normale alla superficie). Tale versore è esterno alla superficie (basta verificarlo in un singolo punto), di conseguenza considereremo il versone normale

$$\hat{n}_2 = (\sin u \cos v,\, \sin u \sin v,\, \cos u) = (x, y, z)\,.$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\Phi_F^+(\partial E_2) &= \int_{\partial E_2} F \cdot \hat{n}_2 \, d\sigma = \\ &= \int_{\partial E_2} (x, y, z) \cdot (x, y, z)\, d\sigma = \\ &= \int_{\partial E_2} x^2 + y^2 + x^2 \, d\sigma = \\ &= \int_{\partial E_2} 1 \, d\sigma = \\ &= \text{Area}\,(\partial E_2) = \\ &= \sqrt{2}\,\pi\,.\end{aligned}$$

$\Phi_F^+(\partial E_3)$: Osserviamo che un versore normale alla superficie è dato da:

$$\begin{aligned}\frac{\Psi_u^3 \wedge \Psi_v^3}{\|\Psi_u^3 \wedge \Psi_v^3\|} &= \frac{1}{u}\left(-u \cos v,\, -u \sin v,\, u\right) = \\ &= \left(-\cos v,\, -\sin v,\, 1\right).\end{aligned}$$

Tale versore è diretto esternamente alla superficie (come si verifica facilmente), di conseguenza considereremo il versone

$$\hat{n}_3 = (-\cos v,\, -\sin v,\, 1)\,.$$

Osserviamo inoltre che tale direzione è normale alla direzione radiale; infatti in un generico punto di ∂E_3 si ha:

$$\begin{aligned}F(x, y, z) \cdot \hat{n}_3 &= (u \cos v,\, u \sin v,\, u) \cdot (-\cos v,\, -\sin v,\, 1) = \\ &= -u \cos^2 v - u \sin^2 v + u = \\ &= -u + u = \\ &= 0\,.\end{aligned}$$

A tale conclusione si poteva giungere anche attraverso semplici considerazioni geometriche: la superficie del cono è in ogni punto tangente alla direzione radiale (in quanto ottenuto dalla rotazione di una retta passante per l'origine), quindi il vettore normale in ogni punto dovrà essere ortogonale al raggio e di conseguenza al campo vettoriale $F(x, y, z)$.
Questi fatti ci permettono di concludere che il flusso di F attraverso la superficie ∂E_3 è nullo:

$$\begin{aligned}\Phi_F^+(\partial E_3) &= \int_{\partial E_3} F \cdot \hat{n}_3 \, d\sigma = \\ &= \int_{\partial E_2} 0 \, d\sigma = \\ &= 0\,.\end{aligned}$$

Concludendo, il flusso totale sarà:

$$\begin{aligned}\Phi_F^+(\partial E) &= \Phi_F^+(\partial E_1 \cup \partial E_2 \cup \partial E_3) = \\ &= \Phi_F^+(\partial E_1) + \Phi_F^+(\partial E_2) + \Phi_F^+(\partial E_3) = \\ &= 0 + \sqrt{2}\,\pi + 0 = \\ &= \sqrt{2}\,\pi\,.\end{aligned}$$

3. Per calcolare il volume di E, applichiamo il teorema della divergenza con il campo vettorial F sopra introdotto:

$$\begin{aligned}\Phi_F^+(\partial E) &= \int_{\partial E} F \cdot \hat{n} \, d\sigma = \\ &= \iiint_E \operatorname{div} F \, dx\, dy\, dz = \\ &= \iiint_E 3 \, dx\, dy\, dz = \\ &= 3 \operatorname{Vol}(E)\,.\end{aligned}$$

Quindi:

$$\operatorname{Vol}(E) = \frac{1}{3}\Phi_F^+(\partial E) = \frac{\sqrt{2}}{3}\,\pi\,.$$

Esercizio 2. Consideriamo la 1-forma differenziale

$$\begin{aligned}\omega(x,y) &= A(x,y)\,dx \;+\; B(x,y)\,dy \;\equiv \\ &\equiv \frac{(y^3-x^2y)\,dx \;+\; (x^3-y^2x)\,dy}{(x^2+y^2)^2}\,,\end{aligned}$$

che è definita su $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Osserviamo che non può essere estesa ad una 1-forma differenziale definita su tutto $\mathbb{R}^2$; infatti, basta considerare ad esempio che

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} A\left(0,\frac{1}{n}\right) &= \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{y^3-x^2y}{(x^2+y^2)^2}\,,\right]_{\substack{x=0\\ y=\frac{1}{n}}} = \\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^4}} = \\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{n^4}{n^3} = \\ &= \lim_{n\to+\infty} n = \\ &= +\infty\,.\end{aligned}$$

Analizziamo ora i quesiti proposti.

1. Dimostriamo che ω è chiusa. Dobbiamo far vedere che:

$$\partial_y\, A(x,y) = \partial_x\, B(x,y)\,.$$

Infatti:

$$\begin{aligned}\partial_y\, A(x,y) &= \frac{(3y^2-x^2)(x^2+y^2)^2-(y^3-x^2y)\,2(x^2+y^2)\,2y}{(x^2+y^2)^4} = \\ &= \frac{(3y^2-x^2)(x^2+y^2)-(y^3-x^2y)\,4y}{(x^2+y^2)^3} = \\ &= \frac{6x^2y^2-x^4-y^4}{(x^2+y^2)^3} \\ \partial_x\, B(x,y) &= \frac{(3x^2-y^2)(x^2+y^2)^2-(x^3-y^2x)\,2(x^2+y^2)\,2x}{(x^2+y^2)^4} = \\ &= \frac{(3x^2-y^2)(x^2+y^2)-(x^3-y^2x)\,4x}{(x^2+y^2)^3} = \\ &= \frac{6x^2y^2-x^4-y^4}{(x^2+y^2)^3}\,.\end{aligned}$$

Quindi abbiamo dimostrato che ω è chiuso. Questo non ci permette di dire che ω è esatta, in quanto tale 1-forma è definita su $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, che non è un dominio semplicemente connesso (e quindi non vale l'equivalenza tra *esattezza* e *chiusura*).

2. Per $\alpha > 0$ fissato, consideriamo la curva γ_α; una sua parametrizzazione è data da:

$$\Phi_\alpha(\theta) = \begin{cases} x = \alpha \cos\theta \\ y = \alpha \sin\theta\,, \end{cases}$$

con $0 \leq \alpha < 2\pi$. Calcoliamo l'integrale richiesto:

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_\alpha} \omega &= \int_0^{2\pi} \frac{(\alpha^3 \sin^3\theta - \alpha^3 \cos^2\theta \sin\theta)}{\alpha^4}\, d(\alpha\cos\theta) + \\
&\quad + \frac{(\alpha^3 \cos^3\theta - \alpha^3 \sin^2\theta \cos\theta)}{\alpha^4}\, d(\alpha\sin\theta) = \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{(\alpha^3 \sin^3\theta - \alpha^3 \cos^2\theta \sin\theta)}{\alpha^4} (-\alpha\sin\theta) \right. + \\
&\quad + \left. \frac{(\alpha^3 \cos^3\theta - \alpha^3 \sin^2\theta \cos\theta)}{\alpha^4} (\alpha\cos\theta) \right] d\theta = \\
&= \int_0^{2\pi} (\cos^4\theta - \sin^4\theta)\, d\theta = \\
&= \int_0^{2\pi} (\cos^2\theta \cos^2\theta - \sin^2\theta \sin^2\theta)\, d\theta = \\
&= \int_0^{2\pi} [\cos^2\theta \cos^2\theta - (1 - \cos^2\theta) \sin^2\theta]\, d\theta = \\
&= \int_0^{2\pi} [\cos^2\theta \cos^2\theta - \sin^2\theta + \cos^2\theta \sin^2\theta]\, d\theta = \\
&= \int_0^{2\pi} [\cos^2\theta - \sin^2\theta]\, d\theta = \\
&= \int_0^{2\pi} \cos 2\theta\, d\theta = \\
&= \frac{1}{2} [\sin 2\theta]_0^{2\pi} = \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

3. Consideriamo una generica curva γ chiusa e semplice, che compia un giro intorno all'origine. Per il teorema di Jordan, tale curva individuerà una regione interna ed una esterna; indichiamo con R tale regione interna (aperta). Ovviamente (per le ipotesi assunte su γ) $0 \in R$;

quindi esisterà una *palla* di raggio α (sufficientemente piccolo) e centro l'origine, la cui chiusura è contenuta interamente in R (cioè $\overline{B_\alpha(0)} \subset R$). Consideriamo ora la regione

$$\Delta = R \setminus \overline{B_\alpha(0)} \ \subset \ \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\,,$$

la cui frontiera è costituita da due componenti connesse:

$$\partial\Delta = \gamma \cup \partial B_\alpha(0) = \gamma \cup \gamma_\alpha\,.$$

Dal teorema di Stokes sappiamo che

$$\int_{\partial\Delta} \omega = \int_{\Delta} [\partial_y A(x,y) - \partial_x B(x,y)]\, dx\, dy\,;$$

calcolando separatamente i due integrali, ed utilizzando il fatto che ω è chiusa, otteniamo:

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} [\partial_y A(x,y) - \partial_x B(x,y)]\, dx\, dy &= \int_{\Delta} 0\, dx\, dy = \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\int_{+\partial\Delta} \omega \ = \ \int_{+\gamma} \omega - \int_{+\gamma_\alpha} \omega\,.$$

Quindi, usando il teorema di Stokes (Teorema di Gauss-Green nel piano) e applicando il punto precedente possiamo concludere che:

$$\int_{+\gamma} \omega = \int_{+\gamma_\alpha} \omega = 0\,.$$

4. Ricordiamo che l'*esattezza* è equivalente alle seguenti condizioni:

   (a) Per ogni curva chiusa γ (contenuta nel dominio di definizione) si ha che $\int_\gamma \omega = 0$;

   (b) Se γ_1 e γ_2 sono due curve (contenute entrambe nel dominio di definizione) con gli stessi estremi e la stessa orientazione, allora $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$.

   Mostriamo l'esattezza utilizzando la prima caratterizzazione (anziché trovare direttamente la primitiva che è piuttosto laborioso). Dobbiamo quindi mostrare che per ogni curva chiusa γ si ha che $\int_\gamma \omega = 0$. Dal

punto precedente sappiamo che questo è vero per le curve chiuse semplici, che compiono un giro intorno all'origine; di conseguenza tale risultato si può estendere facilmente anche alle curve chiuse non semplici che compiono un giro intorno all'origine: basterà "spezzare" il cammino in più cammini semplici e applicare il risultato precedente (utilizzando la linearità (rispetto al cammino) dell'operazione d'integrazione di 1-forme.
Cosa si può dire dei cammini che non girano intorno all'origine? Per tali cammini le cose sono molto più semplici. Infatti, questi possono essere visti come contenuti in un sottodominio semplicemente connesso[2] di $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$: su tale sottodominio vale l'equivalenza tra *chiusura* ed *esattezza*, quindi la nostra ω è, su tale sottodominio, una 1-forma esatta (poiché è chiusa), e quindi il suo integrale su ogni cammino chiuso sarà nullo.

Possiamo quindi concludere che ω è una 1-forma esatta su $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Cerchiamo di trovarne una primitiva, cioè una funzione $f(x, y)$ tale che $\omega = df$; in altre parole si dovrà avere:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = A(x,y) = \dfrac{y^3 - x^2 y}{(x^2+y^2)^2} \\ \\ f_y(x,y) = B(x,y) = \dfrac{x^3 - y^2 x}{(x^2+y^2)^2} \,. \end{cases}$$

Queste equazioni non sembrano di facile integrazione, ma la loro natura ci suggerisce di studiare il problema in altre coordinate: le coordinate polari. Supponiamo di conoscere una primitiva $f(x, y)$ e definiamo la nuova funzione

$$g(\rho, \theta) \equiv f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,,$$

ottenuta esprimendo la f in coordinate polari. Vediamo quali equazioni soddisfa la g (utilizzando la regola di differenziazione di funzioni com-

[2]Graficamente questo fatto risulta abbastanza evidente; un po' meno immediata è la dimostrazione formale. Ad esempio si può ragionare nel seguente modo: poiché la curva γ è chiusa, per il teorema di Jordan dividerà $\mathbb{R}^2$ in due regioni connesse di cui una esterna (illimitata) e una interna (limitata); inoltre poiché la curva non gira intorno all'origine, fa sì che l'origine sia contenuta nella regione esterna illimitata. Consideriamo quindi una curva semplice Γ che collega 0 all' ∞: basterà prendere come sottodominio semplicemente connesso, la regione $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$; infatti questa è semplicemente connessa e contiene γ al suo interno.

poste):

$$\begin{aligned}
g_\rho &\equiv f_x(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\ \cos\theta + f_y(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\ \sin\theta = \\
&= \frac{r^3\sin^3\theta - r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^4}\ \cos\theta + \\
&\quad + \frac{r^3\cos^3\theta - r^3\sin^2\theta\cos\theta}{r^4}\ \sin\theta = \\
&= \frac{\sin^3\theta\cos\theta - \cos^3\theta\sin\theta\ +\ \sin\theta\cos^3\theta - \sin^3\theta\cos\theta}{r} = \\
&= 0 \\
g_\theta &\equiv f_x(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,(-\rho\sin\theta) + f_y(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,(\rho\cos\theta) = \\
&= \frac{r^3\sin^3\theta - r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^4}\,(-\rho\sin\theta) + \\
&\quad + \frac{r^3\cos^3\theta - r^3\sin^2\theta\cos\theta}{r^4}\,(\rho\cos\theta) = \\
&= (\sin^3\theta - \cos^2\theta\sin\theta)\,(-\sin\theta) + (\cos^3\theta - \sin^2\theta\cos\theta)\,(\cos\theta) = \\
&= -\sin^4\theta - \cos^2\theta\sin^2\theta + \cos^4\theta - \sin^2\theta\cos^2\theta = \\
&= \cos^4\theta - \sin^4\theta = \\
&= (\cos^2\theta - \sin^2\theta)(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \\
&= \cos^2\theta - \sin^2\theta = \\
&= \cos 2\theta\,.
\end{aligned}$$

Queste equazioni sono sicuramente più semplici da integrare. La prima ci dice che la g non dipende da ρ. Integrando la seconda otteniamo:

$$g(\rho,\theta) = \frac{\sin 2\theta}{2}\,.$$

Dobbiamo ora ricavare la f, cioè vogliamo riscrivere questa funzione in coordinate cartesiane. Osserviamo che:

$$\begin{aligned}
g(\rho,\theta) &= \frac{\sin 2\theta}{2} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{2} = \\
&= \sin\theta\cos\theta = \frac{r^2\sin\theta\cos\theta}{r^2} = \\
&= \frac{(r\sin\theta)\,(r\cos\theta)}{r^2}\,;
\end{aligned}$$

quindi otteniamo:

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}\,.$$

Si verifica immediatamente che questa è effettivamente una primitiva per la ω.