Tutorato III (19/03/2003)
(Equazioni differenziali ordinarie)

Esercizio 1. Troviamo la soluzione di questo problema. Cominciamo considerando

$$\begin{cases} \dot{y} = 2y^2 \\ y\left(\frac{1}{2}\right) = 1\,. \end{cases}$$

Questo problema è facilmente integrabile e si ottiene:

$$\int_1^y \frac{dy}{y^2} = 2\int_{\frac{1}{2}}^t t\,dt \qquad \Longleftrightarrow \qquad y(t) = \frac{1}{2(1-t)}\,.$$

Sostituendo nella prima equazione otteniamo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{\pi}{4t^2}\cos\left(\frac{\pi}{4t}\right) = \\ &= \frac{d}{dt}\left(\sin\frac{\pi}{4t}\right) \end{aligned}$$

ed integrando

$$x(t) = \sin\left(\frac{\pi}{4t}\right) + C\,;$$

per determinare il valore della costante C, sostituiamo il dato iniziale ed otteniamo

$$C = 0\,.$$

In conclusione la soluzione trovata è data da

$$\begin{cases} x(t) = \sin\left(\dfrac{\pi}{4t}\right) \\ \\ y(t) = \dfrac{1}{2(1-t)}\,. \end{cases}$$

Questa soluzione è definita per $t \in (0,1)$, che è chiaramente l'intervallo di esistenza massimale.

Esercizio 2. Risolviamo anche in questo caso le due equazioni separatamente.

- Cominciamo con la prima equazione:

$$\begin{cases} \dot{x} = \beta\dfrac{\pi}{4}\left(1 + \dfrac{x^2}{\beta^2}\right) \\ x(0) = 0\,. \end{cases}$$

Integrando otteniamo

$$\int_0^x \frac{\frac{1}{\beta}}{1+\left(\frac{x}{\beta}\right)^2}\,dx = \frac{\pi}{4}\int_0^t t\,dt \qquad \Longleftrightarrow \qquad \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\beta}\right) = \frac{\pi}{4}t$$

e quindi la soluzione sarà data da:

$$x(t,\beta) = \beta\,\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}t\right)\,.$$

- Per quanto riguarda la seconda equazione, si integra facilmente ed otteniamo
$$y(t,\beta) = e^{\beta t}\,.$$

In conclusione la soluzione trovata è data da
$$\begin{cases} x(t,\beta) = \beta \,\mathrm{tg}\,\left(\frac{\pi}{4}t\right) \\ \\ y(t,\beta) = e^{\beta t}\,. \end{cases}$$
Quindi l'intervallo di esistenza massimale è
$$I_\beta = (-2,2)\,,$$
che non dipende da β.

Complementi Es. 1. Riprendiamo l'esercizio 1. La soluzione trovata era data da
$$\begin{cases} x(t) = \sin\left(\dfrac{\pi}{4t}\right) \\ \\ y(t) = \dfrac{1}{2(1-t)} \end{cases}$$
definita per $t \in (0,1)$, che è chiaramente l'intervallo di esistenza massimale (quindi avremo $\alpha = 0$ e $\beta = 1$).

1.1 Per mostrare che
$$\lim_{t\downarrow 0} \,\mathrm{dist}\left(\,(x(t),y(t)),\,\left\{y = \frac{1}{2}\right\}\right) = 0$$
è sufficiente osservare che
$$\mathrm{dist}\left(\,(x(t),y(t)),\,\left\{y = \frac{1}{2}\right\}\right) = \left|y(t) - \frac{1}{2}\right|\,.$$
Quindi:
$$\begin{aligned} &\lim_{t\downarrow 0} \,\mathrm{dist}\left(\,(x(t),y(t)),\,\left\{y = \frac{1}{2}\right\}\right) = \\ &= \lim_{t\downarrow 0}\left|y(t) - \frac{1}{2}\right| = \\ &= \lim_{t\downarrow 0}\left|\frac{1}{2(1-t)} - \frac{1}{2}\right| = 0\,. \end{aligned}$$
Inoltre
$$\begin{aligned} \lim_{t\uparrow 1} |(x(t),y(t))| \quad &\geq \quad \lim_{t\uparrow 1} |y(t)| = \\ &= \quad \lim_{t\uparrow 1}\left|\frac{1}{2(1-t)}\right| = +\infty \end{aligned}$$
e questo mostra il secondo limite.
Mostriamo ora che ogni punto $P \in [-1,1] \times \left\{\frac{1}{2}\right\}$ è un punto limite della

nostra soluzione per $t \downarrow 0$. Infatti, sia $P = \left(x_0, \frac{1}{2}\right)$; allora esiste un $\gamma_0 \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ tale che

$$x_0 = \sin\gamma_0 = \sin(\gamma_0 + 2\pi n)\,,$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. Possiamo prendere quindi una successione crescente di punti

$$\gamma_n \equiv \gamma_0 + 2\pi n \in [2\pi n, 2\pi(n+1)], \qquad \gamma_n \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

e definire una successione di tempi

$$t_n \equiv \frac{\pi}{4\gamma_n} \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Mostriamo che si tratta proprio della successione cercata. Innazitutto, osserviamo che $t_n \in (0,1)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$; infatti:

$$\begin{aligned} 0 \;\; &\leq \;\; t_n = \frac{\pi}{4\gamma_n} = \frac{\pi}{4(\gamma_0 + 2\pi n)} \leq \\ &\leq \;\; \frac{\pi}{4\gamma_0} \leq \frac{\pi}{4}\frac{2}{\pi} = \\ &= \;\; \frac{1}{2} < 1\,. \end{aligned}$$

Inoltre

$$\begin{aligned} (x(t_n), y(t_n)) \;\; &= \;\; \left(\sin\left(\frac{\pi}{4t_n}\right), \frac{1}{2(1-t_n)}\right) = \\ &= \;\; \left(\sin\gamma_n, \frac{1}{2(1-t_n)}\right) = \\ &= \;\; \left(x_0, \frac{1}{2(1-t_n)}\right) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \left(x_0, \frac{1}{2}\right)\,. \end{aligned}$$

1.2 Ci possiamo limitare a considerare i compatti K contenuti in

$$\mathcal{A} \equiv [-1,1] \times \left(\frac{1}{2}, \infty\right)\,,$$

in quanto il grafico della nostra soluzione è contenuto in $\mathcal{A}$.
Sia K un tale compatto, cioè un insieme chiuso e limitato (in quanto stiamo lavorando in $\mathbb{R}^2$); esistono quindi finiti

$$m = \min_{(x,y)\in K} y \qquad M = \max_{(x,y)\in K} y$$

ed in particolare $m > \frac{1}{2}$. Per quanto detto prima

$$\lim_{t\downarrow 0} y(t) = \frac{1}{2}$$

e

$$\lim_{t\uparrow 1} y(t) = +\infty\,,$$

e quindi (come segue dalla definizione di limite) esisteranno sicuramente dei tempi t_0 e t_1 che soddisfano le ipotesi richieste, per ogni $0 < \delta < 1$.

Complementi Es. 2. Sia K un compatto contenuto in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e siano β, $\beta' \in K$; sia inoltre C un compatto in $\cap_{\beta\in K} I_\beta = (-2,2)$ e sia $t_0 \in C$.
Definiamo le seguenti costanti (sono tutte finite in quanto si tratta di massimi di funzioni continue su compatti):

$$\begin{aligned} T &\equiv \sup_{t\in C}\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}t\right)\right| < \infty \\ M &\equiv \sup_{(\beta,t)\in K\times C} e^{\beta t} < \infty \\ B &\equiv \sup_{t\in C}|t| < \infty\,. \end{aligned}$$

Abbiamo le seguente stime sulle due componenti:

$$\begin{aligned} |x(t_0,\beta) - x(t_0,\beta')| &\leq \left|\beta\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}t_0\right) - \beta'\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}t_0\right)\right| \leq \\ &\leq T\,|\beta-\beta'| \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} |y(t_0,\beta) - y(t_0,\beta')| &\leq \left|e^{\beta t_0} - e^{\beta' t_0}\right| \leq \\ &\leq M\,|\beta t_0 - \beta' t_0| \leq \\ &\leq M\,B\,|\beta-\beta'|\,. \end{aligned}$$

Otteniamo quindi la seguente costante di Lipschitz:

$$L = \sqrt{T^2 + M^2B^2}\,.$$