Tutorato IV (26/03/2003)

(Funzioni differenziabili da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$)

Esercizio 1.

1.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \begin{pmatrix} y\cos(xy) \\ y^2 e^{xy^2} \end{pmatrix} \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \begin{pmatrix} x\cos(xy) \\ 2xye^{xy^2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

2. Dobbiamo mostrare che

$$\lim_{h=(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|f(h_1,h_2)-f(0,0)-L(h)|}{|h|} = 0\,, \tag{1}$$

dove

$$\begin{aligned}
L(h) &\equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Cominciamo col fornire una stima del numeratore che compare nell'espressione in (1). Stimiamo separatamente le due componenti del vettore di cui stiamo calcolando la norma (euclidea):

- Prima componente:

$$\begin{aligned}
&|\sin(h_1h_2)| \leq \\
&\leq\ |h_1h_2| \\
&\leq\ |h|^2\,.
\end{aligned}$$

- Seconda componente (non è restrittivo assumere che $|h| \leq 1$, in quanto poi andremo a considerare il limite per $|h| \to 0$):

$$\begin{aligned}
&\left|e^{h_1h_2^2}-1\right| \leq \\
&\leq\ 3\left|h_1h_2^2\right| \leq \\
&\leq\ 3\,|h|^3 \leq \\
&\leq\ 3\,|h|^2\,.
\end{aligned}$$

Quindi otterremo la seguente stima:

$$\begin{aligned}
&\frac{|f(h_1,h_2)-f(0,0)-L(h)|}{|h|} \leq \\
&\leq\ \frac{\sqrt{10}\,|h|^2}{|h|} = \\
&=\ \sqrt{10}\,|h| \overset{h\to(0,0)}{\longrightarrow} 0\,.
\end{aligned}$$

3. Applicando la regola per la differenziazione di funzioni composte otteniamo:

$$F'(t) \quad = \quad \frac{\partial f}{\partial x}(g(t), 1-g^2(t))g'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(t), 1-g^2(t))(-2g(t)g'(t)) \,.$$

Osservando che:

$$\begin{aligned} g(0) &= 1 \\ g'(t) &= \frac{1}{\cosh^2 t} + \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ g'(0) &= 1 \end{aligned}$$

ed usando le espressioni ricavate nel punto 1), otteniamo:

$$\begin{aligned} F'(0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) - 2\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = \\ &= \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Esercizio 2. Applicando la regola di differenziazione delle funzioni composte si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,h(x,z),z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,h(x,z),z) \, + \, \frac{\partial f}{\partial y}(x,h(x,z),z) \, \frac{\partial h}{\partial x}(x,z) =$$

$$= \left(\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,h(x,z),z), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,h(x,z),z), \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,h(x,z),z) \ \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,z) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} f(x,h(x,z),z) = \frac{\partial f}{\partial z}(x,h(x,z),z) \, + \, \frac{\partial f}{\partial y}(x,h(x,z),z) \, \frac{\partial h}{\partial z}(x,z) =$$

$$= \left(\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,h(x,z),z), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,h(x,z),z), \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,h(x,z),z) \ \right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{\partial h}{\partial z}(x,z) \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Esercizio 3.

1. Sia $y = f(x)$ una soluzione C^2 in un intorno di $x = 0$, dell'equazione

$$x^2 + \sinh y + e^{xy} = 1 \,,$$

tale che $f(0) = 0$. Quindi la funzione

$$F(x) \equiv x^2 + \sinh f(x) + e^{xf(x)} - 1 \equiv 0$$

e di conseguenza anche tutte le sue derivate saranno indenticamente nulle (in quanto si tratta di una funzione costante). In particolare usando il fatto che $f(0) = 0$ otteniamo:

$$
\begin{aligned}
0 = F'(0) &= \Big[2x + (\cosh f(x)) f'(x) + e^{xf(x)}(f(x) + xf'(x))\Big]_{|x=0} = \\
&= f'(0)
\end{aligned}
$$

cioè $x = 0$ è un punto critico per tale funzione. Studiamo la derivata seconda in modo da determinare la natura di tale punto critico:

$$
\begin{aligned}
0 = F''(0) &= \Big[2 + (\sinh f(x))(f'(x))^2 + (\cosh f(x)) f''(x) + \\
&\quad + e^{xf(x)} \left((f(x) + xf'(x))^2 + 2f'(x) + xf''(x)\right)\Big]_{|x=0} = \\
&= 2 + f''(0)\,,
\end{aligned}
$$

e quindi $f''(0) = -2$, cioè si tratta di un punto di massimo relativo.

2. L'esistenza di una simile funzione è garantita dal Teorema della funzione implicita, in quanto

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) &= [\cosh y + xe^{xy}]_{|(x,y)=(0,0)} = \\
&= 1 \neq 0.
\end{aligned}
$$