Tutorato V (02/04/2003)

(Teorema della funzione implicita e della funzione inversa)

Esercizio 1.

1. Cominciamo con l'osservare che

$$
\begin{aligned}
f(x_0, g(x_0)) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad g(x_0)^2 - 6g(x_0) - 16 = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad g(x_0) = -2 \quad \text{oppure} \quad g(x_0) = 8
\end{aligned}
$$

   quindi dobbiamo applicare il teorema delle funzioni implicite nei punti

$$
P_+ = (1, -2, 8) \qquad \text{e} \qquad P_- = (1, -2, -2).
$$

   In tali punti si ha:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(P_+) &= (2y-6)_{|_{y=8}} = 10 \neq 0 \\
\frac{\partial f}{\partial y}(P_-) &= (2y-6)_{|_{y=-2}} = -10 \neq 0
\end{aligned}
$$

   e di conseguenza (applicando il TFI) esistono due funzioni $g_\pm$, che sono C^∞ in un intorno di x_0, tali che $f(x, g_\pm(x)) = 0$ in tale intorno e

$$
g_+(x_0) = 8 \qquad \text{e} \qquad g_-(x_0) = -2\,.
$$

2. L'unica soluzione che è positiva in x_0 è $g+$. Quindi dobbiamo mostrare che in tale punto la funzione ha un massimo relativo stretto, cioè il suo gradiente è nullo in x_0 e la sua matrice hessiana in tale punto è definita negativa.
   Cominciamo col mostrare che $\nabla g(x_0) = 0$. Usando il fatto che in un intorno di x_0

$$
f(x, g_+(x)) = |x|^2 + g(x)^2 - 2x_1 + 4x_2 - 6g(x) - 11 \equiv 0\,,
$$

   e derivando questa equazione otteniamo:

$$
\begin{aligned}
0 &\equiv \nabla(f(x_0, g_+(x_0))) = \\
&= 2(x_0)^T + 2g_+(x_0)\,\nabla g_+(x_0) + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} - 6\nabla g_+(x_0) = \\
&= 2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + 16\,\nabla g_+(x_0) + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} - 6\nabla g_+(x_0) = \\
&= 10\,\nabla g_+(x_0)
\end{aligned}
$$

   e quindi $\nabla g_+(x_0) = 0$, cioè x_0 è un punto critico per la nostra funzione.
   Valutiamo ora la matrice hessiana $H_{g_+}(x_0)$. Usando la relazione scritta

sopra e derivando, otteniamo:

$$\begin{aligned}
0 &\equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,g(x)) = \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + (2g_+(x_0)-6)H_{g_+}(x_0) + \\
&\quad + 2\begin{pmatrix} \partial_{x_1} g_+(x_0)\partial_{x_1} g_+(x_0) & \partial_{x_1} g_+(x_0)\partial_{x_2} g_+(x_0) \\ \partial_{x_2} g_+(x_0)\partial_{x_1} g_+(x_0) & \partial_{x_2} g_+(x_0)\partial_{x_2} g_+(x_0) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + 10\, H_{g_+}(x_0)\,,
\end{aligned}$$

e di conseguenza la matrice hessiana è definita negativa:

$$H_{g_+}(x_0) = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{5} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{5} \end{pmatrix}$$

e quindi si tratta di un punto di massimo relativo (stretto).

Esercizio 2. Consideriamo la **prima formulazione** dell'esercizio (poi faremo delle osservazioni sull'equivalenza della seconda formulazione).
Applichiamo il teorema della funzione inversa alla funzione f. Cominciamo con l'osservare che $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ e la sua matrice Jacobiana è data da:[1]

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x) = \mathbb{I}_n + 2(\cos|x|^2)A \qquad \text{con A matrice di elementi } A_{ij} \equiv (v_i x_j)$$

Ovviamente $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0) = \mathbb{I}_n$, che è chiaramente invertibile e

$$\det \frac{\partial f}{\partial x}(0) = \det \mathbb{I}_n = 1\,.$$

Quindi esiste un'unica funzione g, inversa di f, con $g \in C^\infty(B_r(0))$ per un opportuno $r > 0$. Cerchiamo di dare un stima del raggio r di tale intorno.
In particolare, dal teorema della funzione inversa[2] segue che se ρ è t.c.

$$\sup_{|x|\le\rho} \left\| \mathbb{I}_n - \mathbb{I}_n \frac{\partial f}{\partial x} \right\| \le \frac{1}{2}$$

allora g è definita su $B_r(0)$ con

$$r \equiv \frac{\rho}{2\,\|\mathbb{I}_n\|} = \frac{\rho}{2}\,.$$

[1] Notare infatti che $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} = \delta_{i,j} + 2v_i x_j \cos|x|^2$, dove $\delta_{i,j}$ è il simbolo di Kroenecker, cioè:

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

[2] Cfr. Luigi Chierchia, *Lezioni di Analisi Matematica 2*, pag. 156

Diamo quindi una stima per ρ usando i seguenti fatti:[3]

$$\begin{aligned}
\left\| \mathbb{I}_n - \mathbb{I}_n \frac{\partial f}{\partial x} \right\| &= \left\| \mathbb{I}_n - \mathbb{I}_n - 2(\cos|x|^2)A \right\| \leq \\
&\leq 2\|A\| \\
\|A\| &= \max\{|v_1|\|x\|_1, \ldots, |v_n|\|x\|_1\} \leq \\
&\leq \|v\|_\infty \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\, \|v\|_\infty \, |x| \, .
\end{aligned}$$

Usando tali relazioni segue immediatamente che:

$$\begin{aligned}
\sup_{|x|\leq\rho} \left\| \mathbb{I}_n - \mathbb{I}_n \frac{\partial f}{\partial x} \right\| &\leq \sup_{|x|\leq\rho} 2\sqrt{n}\, (\|v\|_\infty |x|) \leq \\
&\leq 2\sqrt{n}\, \|v\|_\infty \, \rho
\end{aligned}$$

e di conseguenza sarà sufficiente prendere

$$\rho \leq \frac{1}{4\sqrt{n}\|v\|_\infty}$$

e quindi

$$r \leq \frac{1}{8\sqrt{n}\|v\|_\infty} \, .$$

Osserviamo che $r \to +\infty$ quando $\|v\| \to 0$; questo risultato era in un certo senso " attendibile" in quanto quando $\|v\| \to 0$, la f tende alla funzione identità, che è invertibile dappertutto!

Discutiamo ora brevemente la **seconda formulazione** dell'esercizio. In tal caso l'esercizio può essere risolto applicando direttamente il teorema della funzione implicita (anzichè il teorema della funzione inversa). Indichiamo con

$$F(x, y) = f(x) - y$$

e mostriamo che è possibile applicare il TFI in un intorno del punto $(x, y) = (0, 0)$; infatti (utilizziamo la stessa notazione introdotta nella discussione precedente):

$$\begin{aligned}
F(0,0) &= f(0) - 0 = 0 \\
\frac{\partial F}{\partial x}(0,0) &= \mathbb{I}_n + \left[2(\cos|x|^2)A\right]_{(x,y)=(0,0)} = \mathbb{I}_n
\end{aligned}$$

[3] La norma di una matrice è così definita (consideriamo su $\mathbb{R}^n$ la norma del sup):

$$\begin{aligned}
\|A\| &= \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ \|x\|_\infty=1}} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \\
&= \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ \|x\|_\infty=1}} \|Ax\|_\infty .
\end{aligned}$$

Si dimostra (Esercizio!) che tale sup è proprio uguale alla seguente espressione:

$$\|A\| = \max_{k=1,\ldots,n} \left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right\}$$

cioè è il massimo delle somme dei moduli delle componenti di ciascuna riga.

quindi la matrice jacobiana è invertibile nel punto $(0,0)$. Applicando il TFI possiamo concludere l'esistenza di una funzione g definita in un intorno di $y=0$, tale che per ogni punto in tale intorno si abbia:

$$F(g(y),y)=0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(g(y))=y$$

ma quindi la g altri non è, se non l'inversa di f in un intorno di $x=0$.
Troviamo ora un $r>0$ in modo che la g sia definita su $B_r(0)$. Sempre dal teorema della funzione implicita[4] segue che è sufficiente trovare r, $\rho>0$ tali che

$$\begin{aligned}
&\sup_{B_r(0)} |F(0,y)| \leq \frac{\rho}{2\|T\|} \qquad \text{con} \qquad T \equiv \left(\frac{\partial F}{\partial x}(0,0)\right)^{-1} = \mathbb{I}_n \\
&\sup_{B_\rho(0)\times B_r(0)} \left\| \mathbb{I}_n - \mathbb{I}_n \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) \right\| \leq \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

Cominciamo dalla prima stima:

$$\sup_{B_r(0)} |F(0,y)| \quad = \quad \sup_{B_r(0)} |y| = r\,,$$

quindi bisognerà richiedere che $r \leq \frac{\rho}{2}$.
Per quanto riguarda la seconda stima (useremo le osservazioni fatte in precedenza a proposito di $\|A\|$):

$$\begin{aligned}
\sup_{B_\rho(0)\times B_r(0)} \left\| \mathbb{I}_n - \mathbb{I}_n \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) \right\| &= \sup_{B_\rho(0)\times B_r(0)} \left\| \mathbb{I}_n - \mathbb{I}_n - 2(\cos|x|^2)A \right\| = \\
&= \sup_{B_\rho(0)\times B_r(0)} (2\|A\|) \leq \\
&\leq \sup_{B_\rho(0)\times B_r(0)} \left(2\sqrt{n}\|v\|_\infty |x|\right) \leq \\
&\leq 2\sqrt{n}\|v\|_\infty \rho
\end{aligned}$$

quindi sarà sufficiente richiedere $\rho \leq \dfrac{1}{4\sqrt{n}\|v\|_\infty}$.
Concludendo la g è definita per

$$r \leq \frac{1}{8\sqrt{n}\|v\|_\infty}\,.$$

Esercizio 3.

1. Applichiamo il teorema della funzione implicita alla funzione

$$g(x,y) = e^{x^2+y^2} - x^2 - 2y^2 + 2\sin y - 1\,.$$

Osserviamo che

$$g(0,0)=0$$

[4] Cfr. Luigi Chierchia, *Lezioni di Analisi Matematica 2*, pagg. 151 e ss.

e che

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2y\left(e^{x^2+y^2}-2\right)+2\cos y$$

da cui

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = 2 \neq 0\,.$$

Quindi applicando il TFI segue l'esistenza di una funzione $y = f(x)$, definita in un intorno di $x = 0$ (i.e $B_r(0)$ per un opportuno $r > 0$), tale che

$$g(x, f(x)) = 0 \quad \forall\, x \in B_r(0) \qquad \text{e} \qquad f(0) = 0\,.$$

2. Cerchiamo di dare una stima sul raggio dell'intorno di definizione della f, i.e. r. Dal teorema della funzione implicita[5] segue che è sufficiente trovare r, $\rho > 0$ tali che

$$\sup_{B_r(0)} |g(x,0)| \leq \frac{\rho}{2|T|} \qquad \text{con} \qquad T \equiv \left(\frac{\partial g}{\partial y}(0,0)\right)^{-1} = \frac{1}{2}$$
$$\sup_{B_r(0)\times B_\rho(0)} \left|1 - T\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right| \leq \frac{1}{2}\,.$$

Cominciamo con lo studiare la prima stima, assumendo che $r < 1$:

$$\begin{aligned}
\sup_{B_r(0)} |g(x,0)| &= \sup_{B_r(0)} |e^{x^2} - x^2 - 1| \leq \\
&\leq \sup_{B_r(0)} \left(|e^{x^2}-1| + |x|^2\right) \leq \\
&\leq \sup_{B_r(0)} \left(e^{r^2}|x|^2 + |x|^2\right) \leq \\
&\leq \sup_{B_r(0)} \left(e^{r^2}+1\right)|x|^2 \leq \\
&\leq 4\,r^2 \overset{\text{th.}}{\leq} \rho\,. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Per quando riguarda la seconda stima, assumendo che $\rho < 1$, si ottiene:

$$\begin{aligned}
\sup_{B_r(0)\times B_\rho(0)} \left|1 - T\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right| &\leq \sup_{B_r(0)\times B_\rho(0)} \left|1 - ye^{x^2+y^2} + 2y - \cos y\right| \leq \\
&\leq \sup_{B_r(0)\times B_\rho(0)} \left(|1-\cos y| + |y|\,|e^{x^2+y^2}-2|\right) \leq \\
&\leq \sup_{B_r(0)\times B_\rho(0)} (|y| + 6|y|) \leq \\
&\leq \sup_{B_r(0)\times B_\rho(0)} 7|y| \leq \\
&\leq 7\rho \overset{\text{th.}}{\leq} \frac{1}{2}\,,
\end{aligned}$$

[5] Cfr. Luigi Chierchia, *Lezioni di Analisi Matematica 2*, pagg. 151 e ss.

cioè è sufficiente chiedere $\rho \leq \frac{1}{14}$. Sostituendo in (1) otteniamo

$$r^2 \leq \frac{1}{4 \cdot 14} = \frac{1}{56} \qquad \Longleftrightarrow \qquad r \leq \frac{1}{\sqrt{56}}\,.$$

3. Il limite richiesto è una forma indeterminata, ma può essere risolto applicando il teorema di De L'Hopital. Osserviamo innanzitutto che

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial g}{\partial y}(x, f(x))} = \\ &= -\frac{2x\left(e^{x^2+f^2(x)}-1\right)}{2f(x)\left(e^{x^2+f^2(x)}-2\right)+2\cos f(x)} \end{aligned}$$

e quindi:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x} = \\ &= -\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2+f^2(x)}-1}{2f(x)\left(e^{x^2+f^2(x)}-2\right)+2\cos f(x)} = \\ &= 0\,. \end{aligned}$$