Tutorato VIII (14/05/2003)

(Integrazione secondo Riemann in $\mathbb{R}^n$ e cambi di variabile.)

Esercizio 1. Innanzitutto osserviamo che per $(x,y) \in D$ (con D denotiamo il disco unitario in $\mathbb{R}^2$) si ha che

$$x^2 + y^2 - 2 \leq -1 \qquad \text{e} \qquad 4 - (x+y) \geq 2\,,$$

da cui possiamo concludere che

$$x^2 + y^2 - 2 \leq 4 - (x+y)\,,$$

cioè la base superiore di tale regione è rappresentata dalla porzione di piano $z = 4-(x+y)$ *intercettata* dal cilindro, mentre la base inferiore dalla porzione di paraboloide $z = x^2 + y^2 - 2$.
Quindi la nostra regione R può essere scritta in *forma normale* nel seguente modo:

$$R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\; x^2 + y^2 \leq 1,\; x^2 + y^2 - 2 \leq z \leq 4 - (x+y)\}.$$

Possiamo quindi calcolarne il volume applicando le formule di riduzione:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(R) &= \iiint_R dx\,dy\,dz = \iint_D dx\,dy \int_{x^2+y^2-2}^{4-(x+y)} dz = \\
&= \iint_D \left[4 - (x+y) - (x^2+y^2-2)\right]\,dx\,dy = \\
&= \iint_D \left[6 - (x+y) - (x^2+y^2)\right]\,dx\,dy = \;(*)
\end{aligned}$$

passando in coordinate polari, ed utilizzando il fatto che $\int_0^{2\pi} \cos\theta\,d\theta = \int_0^{2\pi} \sin\theta\,d\theta = 0$, otteniamo:

$$\begin{aligned}
(*) &= \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} \rho\left[6 - (\rho\cos\theta + \rho\sin\theta) - \rho^2\right]\,d\theta = \\
&= \int_0^1 2\pi\rho\left[6 - \rho^2\right]\,d\rho = \\
&= 2\pi\left[6\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right] = \\
&= \frac{11}{2}\pi\,.
\end{aligned}$$

Esercizio 2.

1. Descriviamo la regione E in coordinate polari (ρ, θ). Innanzitutto, il fatto che $x \geq 0$ implica una prima limitazione per la variabile angolare θ, cioè $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Scriviamo ora la relazione $(x^2+y^2)^2 \leq (x^2-y^2)$ in coordinate polari (usando la relazione $x = \rho\cos\theta$ e $y = \rho\sin\theta$):

$$\rho^4 \leq \rho^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \rho^2 \leq \cos 2\theta\,.$$

   Osserviamo che la relazione sopra ha senso soltanto per valori di θ per cui $\cos 2\theta \geq 0$, cioè $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$. In conclusione, la rappresentazione di E in coordinate polari è data da:

$$E^{(\text{pol})} = \left\{(\rho,\,\theta): \quad -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4},\ \rho^2 \leq \cos 2\theta\right\}.$$

   Volendo graficarla, otterremo una regione a forma di "petalo" compresa tra le bisettrici del I e IV quadrante, simmetrica rispetto all'asse delle x, con "vertice" in $(0,0)$ e passante per $(1,0)$.

2. Determiniamo l'area di E, utilizzando la rappresentazione in coordinate polari:

$$\begin{aligned}
\text{Area}(E) &= \iint_E dx\,dy = \int_{E^{(\text{pol})}} \rho\,d\rho\,d\theta = \\
&= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} \rho\,d\rho = \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta\,d\theta = \\
&= \frac{1}{4}[\sin 2\theta]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \\
&= \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

3. Osserviamo che l'insieme E_k si può scrivere in coordinate polari:

$$E_k^{(\text{pol})} = \left\{(\rho,\,\theta): \quad -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4},\ \rho^2 \leq k^2\cos 2\theta\right\},$$

   mentre in coordinate cartesiane:

$$E_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: \quad x \geq 0,\ (x^2+y^2)^2 \leq k^2(x^2-y^2)\}\,.$$

Usando la rappresentazione in coordinate polari, si calcola facilmente l'area (procedendo come già fatto per E):

$$\begin{aligned}
\text{Area}(E_k) &= \iint_{E_k} dx\,dy = \int_{E_k^{(\text{pol})}} \rho\,d\rho\,d\theta = \\
&= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{k\sqrt{\cos 2\theta}} \rho\,d\rho = \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} k^2 \cos 2\theta\,d\theta = \\
&= \frac{1}{4}[k^2 \sin 2\theta]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \\
&= \frac{k^2}{2}\,.
\end{aligned}$$

4. Calcoliamo ora il volume di G. A tal fine osserviamo che G può anche essere definito nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
G &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x \geq 0,\ (x^2+y^2)^2 \leq (1-z^2)(x^2-y^2),\ |z| \leq 1\} \\
&= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ |z| \leq 1,\ (x,y) \in E_{\sqrt{1-z^2}}\}\,.
\end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
\text{Vol}(G) &= \iint_G dx\,dy\,dz = \\
&= \int_{-1}^{1} dz \int_{E_{\sqrt{1-z^2}}} dx\,dy\ = \\
&= \int_{-1}^{1} \text{Area}(E_{\sqrt{1-z^2}})dz\ = \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{1-z^2}{2}\,dz = \\
&= \frac{2}{3}\,.
\end{aligned}$$

Esercizio 3. Consideriamo il cambio di coordinate suggerito:

$$\Phi(x,y) \equiv \begin{cases} u = y - x^3 \\ v = y + x^3 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Phi^{-1}(u,v) \equiv \begin{cases} x = \sqrt[3]{\frac{v-u}{2}} \\ y = \frac{v+u}{2}\,. \end{cases}$$

Il determinante Jacobiano è dato da:

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \frac{|v-u|^{-\frac{2}{3}}}{3\sqrt[3]{2}}.$$

Osserviamo inoltre che tale trasformazione agisce nel seguente modo sul dominio $\mathcal{T}$:

$$\Phi^{-1}(\mathcal{T}) \equiv \{(u,v):\ 0 \le u \le 2,\ 2+u \le v \le 6-u\}.$$

Possiamo quindi concludere che:

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{T}} x^2(y-x^3)e^{y+x^3}\,dx\,dy &= \frac{1}{6}\int_{\Phi^{-1}(\mathcal{T})} u\,e^v\,du\,dv = \\
&= \frac{1}{6}\int_0^2 du \int_{2+u}^{6-u} u\,e^v\,dv = \\
&= \frac{1}{6}\int_0^2 u\left[e^{6-u} - e^{2+u}\right]\,du = \\
&= \frac{e^6}{6} - \frac{2e^4}{3} - \frac{e^2}{6}\,.
\end{aligned}$$