Tutorato IX (21/05/2003)
(Integrali curvilinei, superficiali e impropri)

Esercizio 1. Una parametrizzazione per la curva γ è data da:

$$\begin{cases} x(\theta) = \rho(\theta)\, \cos\theta \;=\; a\,(1+\cos\theta)\, \cos\theta \\ y(\theta) = \rho(\theta)\, \sin\theta \;=\; a\,(1+\cos\theta)\, \sin\theta \end{cases} \qquad \theta \in (0, 2\pi)\,.$$

Per trovare la lunghezza di γ, dobbiamo calcolare il seguente integrale:

$$lungh\,(\gamma) \;=\; \int_\gamma ds \;:=\; \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, d\theta\,.$$

Osserviamo che

$$\{\; x'(\theta) = \rho'(\theta)\, \cos\theta - \rho(\theta)\, \sin\theta y'(\theta) = \rho'(\theta)\, \sin\theta + \rho(\theta)\, \cos\theta\,,$$

quindi

$$\begin{aligned} \sqrt{x'^2 + y'^2} &= \sqrt{(\rho'(\theta)\, \cos\theta - \rho(\theta)\, \sin\theta)^2 + (\rho'(\theta)\, \sin\theta + \rho(\theta)\, \cos\theta)^2} = \\ &= \sqrt{\rho'(\theta)^2 + \rho(\theta)^2} = \\ &= \sqrt{a^2\, \sin^2\theta + a^2\,(1 + \cos^2\theta + 2\cos\theta)} = \\ &= a\sqrt{2 + 2\, \cos\theta} = \\ &= 2a\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \\ &= 2a\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|\,. \end{aligned}$$

In conclusione:

$$\begin{aligned} lungh\,(\gamma) &= \int_\gamma ds \;:=\; \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} 2a\left|\cos\frac{\theta}{2}\right| d\theta = \\ &= 4a\int_0^{\pi} \cos\frac{\theta}{2}\, d\theta = \\ &= 8a\left[-\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi} = \\ &= 8a\,. \end{aligned}$$

Esercizio 2. Cominciamo col trovare una parametrizzazione per tale superficie $\partial\mathbb{T}^3$. Data la simmetria del problema, introduciamo nel piano x, y le coordinate polari $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$. Considerando un generico asse ρ (ρ misura la distanza dall'asse z), la circonferenza nel piano ρ, z si rappresenta in coordinate polari nella forma

$$\rho = R + r\cos\varphi, \quad z = r\sin\varphi \qquad \varphi \in (0, 2\pi)\,.$$

Ne segue che una rappresentazione parametrica della superficie del toro è data da:

$$X(\theta,\varphi) \equiv \begin{cases} x = (R + r\cos\varphi)\cos th \\ y = (R + r\cos\varphi)\sin th \\ z = r\sin\varphi \end{cases} \qquad \theta,\, \varphi \, \in \, (0, 2\pi)\,.$$

Si verifica immediatamente che la funzione X è di classe C^1 (in realtà è molto più regolare!) ed iniettiva (segue dal significato geometrico degli angoli θ e φ). Osserviamo inoltre che in questo modo non abbiamo parametrizzato tutta la superficie del toro, ma abbiamo escluso due circonferenze (quella corrispondente a $\theta = 0$ e quella relativa a $\varphi = 0$); questo non inficia il risultato, in quanto stiamo escludendo degli insiemi aventi *misura* nulla, che non contribuiscono quindi significativamente al calcolo dell'area.
Per trovare tale area, dobbiamo calcolare il seguente integrale:

$$Area\,(\partial\mathbb{T}^3) \;=\; \iint_{dpr\mathbb{T}^3} d\sigma \;:=\; \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} \|X_\theta \wedge X_\varphi\|\, d\varphi\,.$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} X_\theta &= (-(R + r\cos\varphi)\sin\theta,\, -(R + r\cos\varphi)\cos\theta,\, 0) \\ X_\varphi &= (-r\sin\varphi\cos\theta,\, -r\sin\varphi\sin\theta,\, -r\cos\varphi) \end{aligned}$$

e di conseguenza

$$\begin{aligned} X_\theta \wedge X_\varphi &= \begin{pmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -(R + r\cos\varphi)\sin\theta & -(R + r\cos\varphi)\cos\theta & 0 \\ -r\sin\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & -r\cos\varphi \end{pmatrix} = \\ &= r\,(R + r\cos\varphi)\,\cdot\,(-\cos\theta\,\cos\varphi,\, -\sin\theta\,\cos\varphi,\, \sin\varphi)\,. \end{aligned}$$

Quindi otteniamo che:

$$\|X_\theta \wedge X_\varphi\| \;=\; r\,(R + r\cos\varphi)\,.$$

Concludendo:

$$
\begin{aligned}
Area\,(\partial\mathbb{T}^3) &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} \|X_\theta \wedge X_\varphi\|\, d\varphi = \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} r\,(R + r\cos\varphi)\, d\varphi = \\
&= 4\pi^2 rR\,.
\end{aligned}
$$

Esercizio 3. Per cominciare ricaviamo alcune informazioni relative all'insieme F_p. Consideriamo un valore $z_0 \in (0,1)$ e studiamo la sezione che si ottiene intersecando F_p con il piano $z = z_0$:

$$
\begin{cases} z = z_0 \\ x^2 + y^2 = z_0^{2p} \end{cases}
$$

si ottiene una circonferenza di centro $C_{z_0} = (0,0,z_0)$ e raggio z_0^p. Osserviamo inoltre che i raggio di queste sezioni crescono al crescere di z_0, secondo la legge z^p. Quindi si tratta di una figura[1] *simile* ad un cono capovolto (con vertice nell'origine) e base sul piano $z = 1$ (il raggio di base è 1). Al variare di p varia la velocità con cui crescono questi raggi e quindi varierà il *profilo* di tale cono:

- Per $0 < p < 1$ la funzione z^p ha la *concavità rivolta verso l'asse delle z* (in quanto i raggi crescono abbastanza lentamente), quindi F_p ha una forma simile ad un *paraboloide* (che corrisponde al caso $p = \frac{1}{2}$), cioè a mo' di *recipiente concavo.*

- Per $p = 1$ abbiamo esattamente un cono circolare retto.

- Per $p > 1$ la funzione z^p ha la *concavità rivolta verso il piano xy* (in quanto i raggi crescono più velocemente), quindi F_p ha una forma simile ad un *imbuto.*

Passiamo ora allo studio dell'integrabilità della funzione z^α su tali domini F_p (al variare di $p > 0$). Chiaramente non c'è alcun probleme quando $\alpha \geq 0$ (la funzione è continua e limitata su F_p). I problemi sorgono quando consideriamo valori negativi di α (in tal caso la funzione non è più limitata su F_p: ha infatti un polo nell'origine).

[1] Questa descrizione abbastanza colorita è dovuta al fatto di non poter/voler aggiungere delle figure!

Consideriamo quindi una famiglia *crescente* di compatti $\{K_n\}_n$, che *invadono* tutto F_p (cioè ogni compatto in F_p è definitivamente contenuto negli elementi di tale famiglia); poiché la funzione in esame è una funzione positiva (su F_p) ci basterà considerare

$$\lim_{n\to\infty} \iiint_{K_n} z^\alpha \, dx\, dy\, dz \, .$$

Definiamo per $n > 1$:

$$K_n \equiv \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad \frac{1}{n} < z < 1 \, , \; x^2 + y^2 \leq z^{2p}\} \, ;$$

ovviamente si tratta di una famiglia crescente di compatti ($K_n \subset K_{n+1}$ per ogni $n > 1$) e invadono (al variare di n) tutto F_p. Inoltre la funzione è continua e limitata (e quindi integrabile) su tali domini. Calcoliamo il valore di tale integrale per $n > 1$:

$$\begin{aligned}
\iiint_{K_n} z^\alpha \, dx\, dy\, dz &= \int_{\frac{1}{n}}^{1} dz \iint_{x^2+y^2 \leq z^{2p}} z^\alpha \, dx\, dy = \\
&= \int_{\frac{1}{n}}^{1} z^\alpha \, \mathrm{Area}\,(B^2_{z^p}(0))\, dz = \\
&= \int_{\frac{1}{n}}^{1} z^\alpha \, \pi z^{2p}\, dz = \\
&= \pi \int_{\frac{1}{n}}^{1} z^{\alpha+2p}\, dz = \\
&= \begin{cases} \pi \, [\log z]_{\frac{1}{n}}^{1} & \text{se} \;\; \alpha + 2p = -1 \\ \pi \, \left[\frac{z^{\alpha+2p+1}}{\alpha+2p+1}\right]_{\frac{1}{n}}^{1} & \text{se} \;\; \alpha + 2p \neq -1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \pi \, \log n & \text{se} \;\; \alpha + 2p = -1 \\ \frac{\pi}{\alpha+2p+1} \left[1 - \frac{1}{n^{\alpha+2p+1}}\right] & \text{se} \;\; \alpha + 2p \neq -1 \, . \end{cases}
\end{aligned}$$

Vediamo cosa succede passando al limite per $n \to +\infty$:

$$\iiint_{K_n} z^\alpha \, dx\, dy\, dz \;\; \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \;\; \begin{cases} +\infty & \text{se} \;\; \alpha + 2p = -1 \\ +\infty & \text{se} \;\; \alpha + 2p < -1 \\ \frac{\pi}{\alpha+2p+1} & \text{se} \;\; \alpha + 2p > -1 \, . \end{cases}$$

Concludendo, la funzione z^α è integrabile su F_p se e solo se $a > -1 - 2p$ e in tal caso l'integrale vale $\frac{\pi}{\alpha+2p+1}$.