# Lavoro Guidato N1

**E**sercizio 1 Sia $\omega = a_1(x)dx_1 + a_2(x)dx_2$ una 1-forma differenziabile in $U \subset \mathbf{R}^2$ aperto e sia $c : [0,1] \to U$ un arco differenziabile. Definiamo

$$|\omega|(x) = |\,(a_1(x), a_2(x))\,| = \sqrt{a_1(x)^2 + a_2(x)^2}.$$

a) Supponiamo che esista $M > 0$ tale che $|\omega(x)| \leq M$ per ogni $x \in c([0,1])$. Allora

$$|\int_c \omega| \leq M \mathrm{l}\,(c)$$

ove $\mathrm{l}(c)$ indica la lunghezza della curva $c$.
b) Sia $\omega$ una 1-forma chiusa in $U = \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ e $\sup_{x \in B_1(0)} |\omega|(x) < +\infty$. Allora $\omega$ è esatta in $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$.
c) Mostare che il punto (b) vale ancora se supponiamo soltanto $\lim_{x \to 0} |x||\omega|(x) = 0$ invece di $\sup_{x \in B_1(0)} |\omega|(x) < +\infty$.

**E**sercizio 2 Calcolare la lunghezza delle seguenti curve:
a) $\begin{array}{rccl} \gamma : & [0, 2\pi] & \to & \mathbf{R}^2 \\ & t & \to & a(\cos^3 t, \sin^3 t) \end{array}$, $a > 0$( ipocicoloide con quattro cuspidi);
b) $\begin{array}{rccl} \gamma : & [0, \frac{\pi}{4}] & \to & \mathbf{R}^2 \\ & t & \to & (t, \int_0^t \sqrt{\cos(2s)}ds) \end{array}$;
c) $\begin{array}{rccl} \gamma : & [0, \pi] & \to & \mathbf{R}^2 \\ & t & \to & (\cos t, t + \sin t) \end{array}$;
d) il cappio formato dalla curva $\begin{array}{rccl} \gamma : & (-\infty, +\infty) & \to & \mathbf{R}^2 \\ & t & \to & (t^2, \frac{1}{3}t^3 - t) \end{array}$.

**E**sercizio 3 Calcolare i seguenti integrali curvilinei:
a) $\int_\gamma \sqrt{1 + x^2 + 3y}ds$ ove $\gamma = \{(x, y) :\ y = x^2,\ 0 \leq x \leq 1\}$;
b) $\int_\gamma e^{2z} ds$ ove $\gamma = \{(\cos(\ln t), \sin(\ln t), t) :\ 1 \leq t \leq e^2\}$.