Lavoro Guidato N2

Esercizio 1 Siano $a(x)$, $b(x)$ e $c(x)$ tre funzioni differenziabili omogenee di grado k.
a) Sia $\omega = a(x)dx_1 + b(x)dx_2 + c(x)dx_3$ una 1-forma differenziabile chiusa in $\mathbf{R}^3$. Allora $\omega = df$ ove $f(x) = \frac{a(x)x_1+b(x)x_2+c(x)x_3}{k+1}$ è una funzione differenziabile omogenea di grado $k+1$.
b) Sia $\sigma = a(x)dx_2 \wedge dx_3 + b(x)dx_3 \wedge dx_1 + c(x)dx_1 \wedge dx_2$ una 2-forma differenziabile chiusa in $\mathbf{R}^3$. Allora $\sigma = d\gamma$ ove

$$\gamma = \frac{b(x)x_3 - c(x)x_2}{k+2}dx_1 + \frac{c(x)x_1 - a(x)x_3}{k+2}dx_2 + \frac{a(x)x_2 - b(x)x_1}{k+2}dx_3$$

è una 1-forma differenziabile con coefficienti delle funzioni omogenee di grado $k+1$.

Remark 0.1 Una funzione $f(x) : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$ si dice omogenea di grado $k \in \mathbf{Z}$ se $f(tx) = t^k f(x)$ per ogni $t > 0$ e $x \in \mathbf{R}^N$.

Esercizio 2 Sia $\omega = \frac{e^x}{x^2+y^2}\{(x\cos y + y \sin y)dy + (x \sin y - y \cos y)dx\}$ una 1-forma differenziabile in $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
a) Mostrare che ω è chiusa.
b) Decomporre ω nella forma $\omega = e^x \cos y \omega_0 + e^x \sin y d(\ln r)$ ove $\omega_0 = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$.
c) Mostrare che $\alpha = \omega - \omega_0$ soddisfa $\lim_{|(x,y)|\to 0} |(x,y)||\alpha|(x,y) = 0$ e quindi α è una 1-forma esatta.
d) Calcolare $\int_\gamma \omega$ ove $\begin{array}{rccl} \gamma : & [0,2\pi] & \to & \mathbf{R}^2 \\ & t & \to & (\frac{1}{2}\cos^3 t, \frac{1}{2}\sin^3 t) \end{array}$ è l'ipocicolide a quattro cuspidi.
Sugg. Vedere per il punto (c) il testo della precedente esercitazione.

Esercizio 3 Siano $U, V \subset \mathbf{R}^N$ aperti semplicemente connessi tali che $U \cap V$ è un insieme connesso. Sia ω una 1-forma differenziabile chiusa in $U \cup V$ tale che ω è esatta in U e in V. Allora ω è esatta in $U \cup V$.