

Lavoro Guidato N3

Esercizio 1 Sia $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ un funzione continua e periodica di periodi $S, T, S \neq T$.

Si ponga $P := \{ | kS + mT | : k, m \in \mathbf{Z} \}$.

a) Si mostri che ogni elemento $p \in P$ è un periodo per la funzione f .

b) Se $\frac{T}{S} = \frac{p}{q} \in \mathbf{Q}, p, q \in \mathbf{N}$ coprimi, provare che $A = \frac{S}{q}\mathbf{N}$.

c) Se $\frac{T}{S}$ è un numero irrazionale, allora l'insieme A è denso in \mathbf{R} .

d) Se $\frac{T}{S}$ è un numero irrazionale, allora f è costante.

Sugg. Si tenga presente che vale il seguente risultato:

Teorema(di Jacobi) Se α è un numero irrazionale positivo, allora $\{m\alpha \bmod 1 : m \in \mathbf{N}\}$ è denso in $[0, 1]$.

Esercizio 2 Si calcolino i coefficienti di Fourier e si scriva la serie di Fourier per le seguenti funzioni definite su $[-\pi, \pi]$:

a) $\exp \lambda x, \lambda \neq 0$;

b) $x \cos x$;

c) $x(1 + \cos x)$;

d) $\text{sign } x := \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 ; \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$

e) $\chi_{[a,b]}x := \begin{cases} 0 & \text{se } x < a \text{ o } x > b \\ 1 & \text{se } a \leq x \leq b \end{cases}$.