Soluzioni degli esercizi sull'uso delle derivate

Esercizio 1

Poiché la funzione $\frac{\sin x}{x}$ é continua per ogni $x \neq 0$, applichiamo il Teorema della media integrale e otteniamo:

$$lim_{x\to 0} \int_x^{2x} \frac{\sin x}{x} = lim_{x\to 0}(2x - x)\frac{\sin \xi}{\xi} \quad \xi \in (x, 2x).$$

Per $x \to 0$ anche $\xi \to 0$, quindi, sempre grazie alla continuitá della funzione in oggetto, passando al limite si ottiene

$$lim_{x\to 0} x\frac{\sin \xi}{\xi} = 0.$$

Esercizio 2

Consideriamo la funzione differenza

$$f(x) = \text{arcosx} - 2 \arcsin \sqrt{\frac{1-x}{2}}$$

voglio provare che $f(x)$ é sempre identicamente nulla, quindi derviamola:

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 2\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1-x}{2}}} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1-x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot -\frac{1}{2} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+x}}\frac{1}{\sqrt{1-x}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \ \forall x \in [0,1]$$

pertanto la funzione é costante e vale

$$f(x) = f(1) = 2k\pi - 2(k\pi) \equiv 0.$$

Esercizio 3

Applichiamo il Teorema di Rolle alla funzione $f(x)$ per $x \in (a, c)$, dato che la funzione assume lo stesso valore agli estremi dell'intervallo. Il teorema assicura l'esistenza di un punto $\xi_1 \in (a, c)$ tale che $f'(\xi_1) = 0$. Applichiamo di nuovo il teorema di Rolle a $f(x)$ nell'intervallo (c, b), di nuovo sappiamo che esiste un punto $\xi_2 \in (c, b)$ tale che $f'(\xi_2) = 0$. Applichiamo ora lo stesso teorema a $f'(x)$ nell'intervallo (ξ_1, ξ_2), sapendo che agli estremi f' assume lo stesso valore (cioé zero!). Possiamo ora dedurre l'esistenza di un punto $\xi_3 \in (\xi_1, \xi_2)$ tale che $f''(\xi_3) = 0$.

Esercizio 4

Osserviamo innanzitutto che l'usuale dimostrazione del Teorema di Rolle non puó essere usata perché non siamo su un insieme compatto.
Supponiamo che a ed $f(a)$ siano positivi (non é restrittivo!). Se la funzione é costante allora la proposizione é banalmente verificata, quindi supponiamo che f non sia costante. Esisterá un punto $x_1 > a$ tale che $f(x_1) \neq f(a)$, ad esempio $f(x_1) > f(a)$. D'altra parte, dalla definizione di limite deduciamo che

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0 \ : f(x) \in (f(a) - \varepsilon, \ f(a) + \varepsilon) \forall \ x > M$$

e, poiché é vero per ogni ε possiamo scegliere ε abbastanza piccolo (di conseguenza M sará molto grande) in modo che

$$(*) \qquad f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon < f(x_1), \ x > M$$

Sia x_2 un punto che verifica $(*)$. Dato che la funzione é continua, per il Teorema dei valori intermedi, esisterá $x_3 \in (x_1, x_2)$ tale che $f(x_3) = f(a)$. A questo punto possiamo applicare la usuale versione del Teorema di Rolle, nel compatto $[a, x_3]$, nel quale f assume lo stesso valore agli estremi e quindi concludere che esiste $x_4 \in (a, x_3) \subset (a, +\infty)$ tale che $f'(x_4) = 0$.

Esercizio 5

Siano rispettivamente $L(x, x_0) = \sup_{(x,x_0)} g(t)$ e $l(x, x_0) = \inf_{(x,x_0)} g(t)$. Si ha ovviamente

$$l(x, x_0) \leq g(x) \leq L(x, x_0) \quad \forall x \in (x, x_0),$$

pertanto, essendo $p(x) > 0$,

$$l(x, x_0) \int_{x_0}^{x} p(t) dt \leq g(x) \leq L(x, x_0) \int_{x_0}^{x} p(t) dt \quad \forall x \in (x, x_0).$$

Se $g(x)$ é anche continua essendo la quantitá

$$\frac{\int_{x_0}^{x} g(t) p(t) dt}{\int_{x_0}^{x} p(t) dt}$$

compresa tra gli estremi inferiore e superiore di $g(x)$, per il teorema dei valori intermedi questa quantitá sará uguale a $g(\xi)$ per un certo $\xi \in (x, x_0)$, quindi

$$\int_{x_0}^{x} g(t) p(t) dt = g(\xi) \int_{x_0}^{x} p(t) dt.$$