Esercizio 1

Una scatola contiene 3 calze rosse e 2 nere. Si estragga dalla scatola una calza per volta sino a quando non si sia preso un paio dello stesso colore. Si calcoli la probabilitá che in due estrazioni si sia preso un paio di calze dello stesso colore. Si chiami C tale evento. Sia R l'evento che la prima calza estratta sia rossa e N l'evento che la prima calza estratta sia nera. Si calcoli $P(R|C)$ e $P(N|C)$.

Soluzione

$$P(C) = \frac{\binom{3}{2}\binom{2}{0} + \binom{2}{2}\binom{3}{0}}{\binom{5}{2}} = \frac{2}{5}$$

$$P(R|C) = \frac{P(R \cap C)}{P(C)} = \frac{\binom{3}{2}\binom{2}{0}}{\binom{5}{2}} \times \frac{5}{2} = \frac{3}{4}$$

$$P(N|C) = \frac{1}{4}$$

Esercizio 2

Una fabbrica produce componenti elettronici. Il 6% é difettoso. Un robot controlla ogni componente. Con probabilitá 10^{-3} lascia passare componenti difettosi, con probabilitá 10^{-4} respinge componenti non difettosi. Si calcoli la probabilitá che:

(1) un componente, scelto a caso, superi il controllo,
(2) un componente non sia difettoso, malgrado non abbia superato il controllo del robot.

Soluzione Si indica con R l'evento che un componente scelto a caso sia respinto.

$$P(R) = \frac{94}{100} \times 10^{-4} + \frac{6}{100} \times (1 - 10^{-3})$$

La probabilitá che un componente, scelto a caso, superi il controllo, é quindi $1 - P(R)$. Sia A l'evento che un componente non sia difettoso. Per rispondere a (2) si calcoli

$$P(A|R) = \frac{P(A \cap R)}{P(R)} = \frac{94}{100} \times 10^{-4}(P(R))^{-1}$$

Esercizio 3

Sei dadi vengono lanciati. Si vince un premio P_1 se almeno due di essi mostrano lo stesso numero. Si vince un premio P_2 se ci sono almeno 4 facce con il numero 6. Si calcoli la probabilitá:

(1) si abbiano solo due 6
(2) si vinca il premio P_1
(3) si vinca il premio P_2
(4) si vinca il premio P_2 avendo vinto P_1.

Soluzione La probabilitá di avere solo due 6 é

$$\binom{6}{2}(\frac{1}{6})^2(\frac{5}{6})^4 = \frac{1}{2}\frac{5^5}{6^5}$$

La probabilitá di vincere il premio P_1

$$1 - \frac{6!}{6^6}$$

La probabilitá di vincere il premio P_2 é

$$\sum_{k=4}^{6}\binom{6}{k}(\frac{1}{6})^k(\frac{5}{6})^{6-k} = \frac{406}{6^6}$$

La probabilitá di vincere il premio P_2 dato che si é vinto P_1 é

$$\frac{406}{6^6}\frac{1}{1-\frac{6!}{6^6}}$$

Esercizio 4
Si acquistano n doni per n persone differenti. Si incartano e si scrive a caso il nome del destinatario del dono. Trovare la probabilitá che almeno un dono sia arrivato al giusto destinatario.

Soluzione Sia A_k l'evento che il k dono abbia il nome del giusto destinatario. Si dovrá quindi calcolare per ottenere la soluzione $P(\cup_1^n A_k)$. Si ricorda che

$$P(\cup_1^n A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - \sum_{k<j} P(A_k \cap A_j) + ...(-1)^{n+1}P(\cap_{k=1}^n A_k)$$

Poiché $n!$ sono tutti i possibili modi di scrivere n nomi differenti sugli n doni si ottiene che

$$P(A_k) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

$$P(A_k \cap A_j) = P(A_j|A_k)P(A_k) = \frac{1}{n}\frac{(n-2)!}{(n-1)!} = \frac{1}{n(n-1)}$$

$$P(A_k \cap A_j \cap A_i) = P(A_i|A_k \cap A_j)P(A_k \cap A_j) = \frac{(n-3)!}{(n-2)!}\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)(n-2)}$$

$$P(\cap_{k=1}^n A_k) = \frac{1}{n!}$$

Quindi

$$P(\cup_1^n A_k) = 1 - \binom{n}{2}\frac{1}{n(n-1)} + \binom{n}{3}\frac{1}{n(n-1)(n-2)} - ...(-1)^{n+1}\frac{1}{n!}$$

$$P(\cup_1^n A_k) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} - ... + (-1)^{n+1}\frac{1}{n!}$$

Esercizio 5 Siano X e Y due numeri scelti, senza rimpiazzo, in modo casuale tra $\{1,2,3,4,5\}$. Si determini

(1) la distribuzione congiunta di X e Y
(2) la distribuzione di $Z = \max\{X, Y\}$
(3) il valore medio di $X + Y$

Soluzione Sia $f(i,j)$,con $i = 1,..5$ e $j = 1,..5$, la distribuzione congiunta Se $i \neq j$ si ottiene $f(i,j) = \frac{1}{20}$, se $i = j$ si ha $f(i,j) = 0$. Si calcola facilmente la distribuzione di Z, $f_Z(z)$ per $z \in \{2,3,4,5\}$

$$f_Z(z) = (z-1)\binom{5}{2}^{-1}$$

Il valor medio di $X + Y$ é

$$E[X+Y] = E[X] + E[Y] = 2\frac{1}{5}[1+2+3+4+5] = 6$$

Esercizio 6 Mostrare che A e B sono indipendenti se e solo se A^c e B^c sono indipendenti.

Soluzione

$$P(A^c \cap B^c) - P(A^c)P(B^c) = P((A \cup B)^c) - ((1 - P(A))((1 - P(B))$$
$$= P(A \cap B) - P(A)P(B)$$