ESAME di CP1 A.A. 2002-2003

11 Giugno 2003

Esercizio 1

Una scatola contiene r palline rosse e b palline bianche. Due giocatori giocano una successione di partite, ciascuna delle quali consiste in una estrazione (con rimpiazzo) eseguita dal giocatore A e analogamente dal giocatore B. Il gioco si ferma non appena si arriva ad una partita nella quale i due giocatori ottengono un risultato diverso, i.e. un giocatore estrae una pallina di colore diverso dall'altro. Si chiede

(1) la probabilità che ad una generica partita il giocatore A estragga una pallina bianca.
(2) la probabilitá che ad una generica partita il giocatore B estragga una pallina rossa.
(3) la probabilitá che ad una generica partita il giocatore A estragga una pallina di colore differente da B.

Sia T la variabile aleatoria che rappresenta la durata del gioco, i.e. il numero di partite giocate.

(1) Si determini la distribuzione di T.
(2) Si determini la media e la varianza di T.

Soluzione Siano X_i e Y_i per $i \geq 1$ due successione di variabili aleatorie. Ciascuna variabile aleatoria é a valore in $\{0,1\}$. L'indice i rappresenta il numero della partita giocata, 0 se la pallina estratta é bianca, 1 se la pallina estratta é rossa, la successione X_i é associata al giocatore A, la successione Y_i al giocatore B. Si ha quindi

(1)
$$P(X_i = 0) = P(Y_i = 0) = \frac{b}{r+b} \qquad i \geq 1$$

(2)
$$P(X_i = 1) = P(Y_i = 1) = \frac{r}{r+b} \qquad i \geq 1$$

(3)
$$\begin{aligned} P(X_i \neq Y_i) &= P(X_i = 0, Y_i = 1) + P(X_i = 1, Y_i = 0) \\ &= P(X_i = 0)P(Y_i = 1) + P(X_i = 1)P(Y_i = 0) = 2\frac{rb}{(r+b)^2} \equiv p \qquad i \geq 1 \end{aligned}$$

(4) Sia $F_T(n)$ la funzione di distibuzione di T. Essa é una geometrica di parametro p

$$F_T(n) = P\{X_i = Y_i \quad \text{per} \quad i = 1,..(n-1) \quad \text{e} \quad X_n \neq Y_n\} = (1-p)^{n-1}p$$

(5)
$$E(T) = \sum_{n\geq 1} n(1-p)^{n-1}p = \frac{1}{p}$$

$$\sigma^2(T) = (1-p)\frac{1}{p^2}$$

Esercizio 2

Una fabbrica produce gelati. Il 50 % é al cioccolato. Un robot pone l'etichetta sulla confezione dei gelati specificando se vi é contenuto cioccolato. Con probabilitá 10^{-5} pone etichette che non dichiarano la presenza di cioccolato su confezioni che contengono cioccolato. Con probabilitá 10^{-4}

pone etichette con la specifica al cioccolato su confezioni che non contengono cioccolato. Si calcoli la probabilitá che:

(1) un gelato, scelto a caso, abbia l'etichetta: contiene cioccolato
(2) un gelato, scelto a caso, non contenga cioccolato, malgrado abbia l'etichetta con la specifica: contiene cioccolato.

Soluzione

(1) Si indichi con C l'evento che un gelato scelto a caso abbia l'etichetta: contiene cioccolato. Sia A l'evento che un gelato scelto a caso sia al cioccolato.

$$P(C) = P(C|A)P(A) + P(C|A^c)P(A^c) = \frac{1}{2}(1 - 10^{-5}) + \frac{1}{2}10^{-4}$$

(2) Sia B l'evento che un gelato, scelto a caso, non contenga cioccolato. Per rispondere a (2) si calcoli

$$P(B|C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)}$$

Poiché

$$P(B \cap C) = P(B)P(C|B) = \frac{1}{2}10^{-4}$$

Si ottiene

$$P(B|C) = \frac{1}{2}10^{-4}(P(C))^{-1}$$

Esercizio 4

Un manoscritto ha 100 pagine. Il numero di volte che una fissata parola (A) ricorre in ogni pagina é una variabile aleatoria distribuita secondo Poisson con media λ ed é indipendente dal numero di volte che compare su ogni altra pagina.

(1) Qual'é il numero medio di pagine senza la parola (A)?
(2) Stimare la probabilitá che il manoscritto abbia almeno 50 pagine senza la parola (A).

Soluzione Sia X_i per $i = 1, ..100$, una successione di variabili aleatorie indipendenti. Poiché probabilitá che (A) non compare nella i-ma pagina é uguale a $p = e^{-\lambda}$ si ponga $X_i = 1$, con probabilitá p se la $i - ma$ pagina non contiene la parola (A), $X_i = 0$, con probabilitá $1 - p$ se la $i - ma$ pagina contiene la parola (A).

Per rispondere a (1) si calcoli

$$E(\sum_{i=1}^{100} X_i) = 100p$$

Per rispondere a (2) si stimi

$$P\{\sum_{i=1}^{100} X_i \geq 50\} = P\{\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 100p}{10\sqrt{p(1-p)}} \geq \frac{50 - 100p}{10\sqrt{p(1-p)}}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{50-100p}{10\sqrt{p(1-p)}}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Esercizio 5

Siano X e Y due variabili aleatorie indipendenti con densita' di probabilitá esponenziale di parametro 1 e 2, rispettivamente. Si determini

(1) E[X+Y], E[XY]
(2) la densitá di probabilitá di $Z = \min\{X, Y\}$
(3) la densitá di probabilitá di $G = \sqrt{X + 1}$.

Soluzione

(1) $E[X+Y] = 1 + \frac{1}{2}$, $E[XY] = E[X]E[Y] = \frac{1}{2}$.

(2) Si consideri la funzione di distribuzione associata a Z

$$F_Z(t) = P\{Z \leq t\} = 1 - P\{Z > t\} = 1 - P\{X > t, Y > t\} = 1 - P\{X > t\}P\{Y > t\} = 1 - e^{-t}e^{-2t}$$

Quindi la densitá di probabilitá di Z e'

$$f_Z(t) = F_Z'(t) = 3e^{-3t}$$

(3) analogamente si ottiene che la densitá di probabilitá di $G = \sqrt{X+1}$

$$f_G(t) = 2te^{-(t^2-1)}$$