**I ESONERO DI CP2 : 8-11-2002**

E. Scoppola

**Esercizio 1**

Sia $E_n$ una sequenza di eventi.

a) Definire $(E_n, i.o.)$ e $(E_n, ev)$.

b) Verificare che $(E_n, ev)^c = (E_n^c, i.o.)$

c) Usare il lemma di Fatou per dimostrare che se gli eventi $E_n$, non necessariamente indipendenti, sono tali che $P(E_n) \to 1$ quando $n \to \infty$, allora $P(E_n, i.o.) = 1$.

**Esercizio 2**

a) Dato uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ e $p \geq 1$, definire lo spazio $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ e la norma $\|.\|_p$.

b) Dimostrare che se $1 \leq p \leq r$ e $X \in \mathcal{L}^r(\Omega, \mathcal{F}, P)$, allora $X \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ e $\|X\|_p \leq \|X\|_r$.

c) Data una sequenza di variabili aleatorie $X_n$ in $\mathcal{L}^p$ definire che cosa vuol dire che la sequenza $X_n$ converge a $X$ in $\mathcal{L}^p$.

d) Sia $X_n$ una sequenza di variabili aleatorie indipendenti con $P(X_n = 1) = p_n$ e $P(X_n = 0) = 1 - p_n$. Dimostrare che $X_n$ converge a 0 in $\mathcal{L}^p$ per ogni $p$, se e solo se $p_n \to 0$. Scegliendo $p_n = \frac{1}{n}$, mostrare che $X_n$ converge a 0 in $\mathcal{L}^p$ per ogni $p$ ma $X_n$ non converge a 0 quasi sicuramente.

**Esercizio 3**

Sia $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}[0,1]$, $P = Leb.$ e si consideri per ogni $x \in [0,1]$ la sua espansione binaria

$$x = \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2^2} + \ldots + \frac{x_n}{2^n} + \ldots \tag{1}$$

unica, se si considerano solo espansioni con un numero infinito di zeri. Si considerino le variabili aleatorie $X_n(x) = x_n$ e si definisca per ogni $n$

$$R_n(x) := 1 - 2X_n(x) \tag{2}$$

a) Disegnare $R_1(x)$ e $R_2(x)$.

b) Dimostrare che $ER_n = 0$, per ogni $n$.

c) Dimostrare che le variabili $R_n$ sono ortonormali:

$$E(R_n R_m) = \delta_{n,m} \tag{3}$$