SCRITTO di PS5 : 20-6-2001
E. Scoppola
Soluzioni

Esercizio 1

Vedere la soluzione al primo esercizio relativo allo scritto di PS5 del 13/07/2001.

Esercizio 2

Punto 1.

Affinché M_n sia una martingala è necessario che $\mathbb{E}\left(M_n \mid \mathcal{F}_n\right) = M_{n-1}$, innanzitutto vale:

$$\mathbb{E}\left(X_k^n\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

quindi:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(M_n \mid \mathcal{F}_n\right) &= \mathbb{E}\left[\left(X_1^n + \cdots + X_{Z_{n-1}}^n\right)\frac{2^n}{(n+1)!} \mid Z_{n-1}\right] = \\ &= \frac{2^n}{(n+1)!}Z_{n-1}\frac{n+1}{2} = \frac{2^{n-1}}{n!}Z_{n-1} = M_{n-1} \qquad \textit{c.v.d}\end{aligned}$$

Punto 2.

Procedendo come al punto precedente otteniamo:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(Z_n^2 \mid \mathcal{F}_n\right) &= \mathbb{E}\left[\left(X_1^n + \cdots + X_{Z_{n-1}}^n\right)^2 \mid Z_{n-1}\right] = \\ &= Z_{n-1}\mathbb{E}\left[\left(X_k^n\right)^2\right] + Z_{n-1}\left(Z_{n-1}-1\right)\left[\mathbb{E}\left(X_k^n\right)\right]^2 = \\ &= Z_{n-1}Var\left(X_k^n\right) + \left[\mathbb{E}\left(X_k^2\right)\right]^2 Z_{n-1}^2\end{aligned}$$

non resta che calcolare $Var\left(X_k^n\right)$:

$$Var\left(X_k^n\right) = \mathbb{E}\left[\left(X_k^2\right)\right] - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2 - \frac{(n+1)^2}{4} \equiv \sigma_n^2$$

e per σ_n^2 si ha:

$$\sigma_n^2 \simeq \frac{1}{3}n^2 - \frac{1}{2}n + \frac{1}{6} + \frac{1}{n} - \frac{1}{4}(n+1)^2 \simeq \frac{1}{12}n^2$$

Punto 3.

La martingala M_n è limitata in $\mathcal{L}^2 \Leftrightarrow \sum_{n\geq 1} \mathbb{E}\left[(M_n - M_{n-1})^2\right] < \infty$, ora:

$$M_n - M_{n-1} = \frac{2^n}{(n+1)!}\left[Z_n - Z_{n-1}\frac{n+1}{2}\right]$$

da cui:

$$(M_n - M_{n-1})^2 = \left(\frac{2^n}{(n+1)!}\right)^2 \left[Z_n^2 + Z_{n-1}^2\frac{(n+1)^2}{4} - Z_n Z_{n-1}(n+1)\right]$$

poiché:

$$\mathbb{E}(Z_n) = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(Z_n \mid \mathcal{F}_{n-1}\right)\right] = \mathbb{E}\left(Z_{n-1}\right)\frac{n+1}{2} = \frac{(n+1)!}{2^n}$$

abbiamo:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[(M_n - M_{n-1})^2\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[(M_n - M_{n-1})^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}\right]\right] = \\
&= \left(\frac{2^n}{(n+1)!}\right)^2 \left\{\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(Z_n^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}\right)\right] + \frac{(n+1)^2}{4}\mathbb{E}\left(Z_{n-1}^2\right) - (n+1)\mathbb{E}\left(Z_{n-1}^2\right)\frac{n+1}{2}\right\} = \\
&= \left(\frac{2^n}{(n+1)!}\right)^2 \left\{\mathbb{E}\left(Z_{n-1}\right)\sigma_n^2 + \frac{(n+1)^2}{4}\mathbb{E}\left(Z_{n-1}^2\right)2 - \frac{(n+1)^2}{2}\mathbb{E}\left(Z_{n-1}^2\right)\right\} = \\
&= \left(\frac{2^n}{(n+1)!}\right)^2 \frac{(n+1)!}{2^n}\sigma_n^2 \sim \frac{2^n n^4}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

ne viene che:

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{E}\left[(M_n - M_{n-1})^2\right] < \infty$$

e quindi M_n è limitata in L^2.

Esercizio 3

Punto 1.

Chiaramente le due frequenze empiriche sono $\nu_1 = \frac{2}{3}$ e $\nu_2 = \frac{1}{3}$ rispettivamente, quindi:

$$I_\rho(\nu) = \nu_1 \log(2\nu_1) + \nu_2 \log(2\nu_2) = \log 2 + \frac{2}{3}\log\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{3}\log\left(\frac{1}{3}\right) = \log 2 - \log 3 + \frac{2}{3}\log 2$$

Punto 2.

Per determinare la frequenza empirica di coppia, sfruttando i dati forniti dal testo, iniziamo con l'osservare che $\nu_{22} = 0$, inoltre:

$$\nu_{21} = \nu_{12} = \bar{\nu}_2$$

$$\bar{\nu}_1 = \nu_{11} + \nu_{12} = \nu_{11} + \bar{\nu}_2$$

e poiché $\bar{\nu}_1 + \bar{\nu}_2 = 1$ abbiamo:

$$\bar{\nu}_1 = 2\bar{\nu}_2$$

Ricordando che $\nu_1 = \frac{2}{3}$ e $\nu_2 = \frac{1}{3}$ otteniamo:

$$\bar{\nu}_2 = \frac{1}{3} = \nu_{12} = \nu_{22} \qquad e \qquad \nu_{11} = \frac{1}{3}$$

procedendo come al punto (1) otteniamo:

$$I_\rho^2 = \nu_{11} \log\left(\frac{\nu_{11}}{\bar{\nu}_1 \rho_1}\right) + \nu_{12} \log\left(\frac{\nu_{12}}{\bar{\nu}_1 \rho_2}\right) + \nu_{21} \log\left(\frac{\nu_{21}}{\bar{\nu}_2 \rho_1}\right) =$$
$$\frac{1}{3} \log\left(\frac{3 \cdot 2}{3 \cdot 2}\right) + \frac{1}{3} \log\left(\frac{3 \cdot 2}{3 \cdot 2}\right) + \frac{1}{3} \log\left(\frac{2 \cdot 3}{3}\right) = \frac{1}{3} \log 2 > I_\rho(\nu)$$

Domande

Vedere la soluzione alle domande relative allo scritto di PS5 del 13/07/2001.