SCRITTO DI CP3 : 10-9-2002

E. Scoppola

Esercizio 1

Siano $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ variabili casuali indipendenti con X_n distribuita con densità di probabilità

$$p_n(x) = \frac{C_n}{x^2 \ln|x|} \mathbf{1}_{\{2<|x|\leq 2+n^\alpha\}} \tag{1}$$

con $\alpha \in (0,1)$.

1) Determinare se le variabili X_n sono in $\mathcal{L}^1$, se la famiglia è limitata in $\mathcal{L}^1$ e se la famiglia è uniformemente integrabile.

2) Dimostrare che $M_n := X_1 + ... + X_n$ è una martingala.

3) M_n converge quasi sicuramente per $n \to \infty$?

4) Vale la legge forte dei grandi numeri per le variabili $X_1, X_2, ..., X_n, ...$?

Esercizio 2

Siano $\{X_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ variabili indipendenti uniformemente e identicamente distribuite a valori $0, 1$ e sia $X_1, ..., X_n$ una sequenza con condizioni periodiche, $X_{n+1} = X_1$, tale che non compaiono mai nella sequenza due zeri consecutivi ed il numero di coppie $1, 0$ nella sequenza è uguale al numero di coppie $1, 1$.

1) Calcolare la misura empirica di coppia e la misura empirica.
2) Valutare asintoticamente la probabilità della realizzazione di una simile sequenza con il teorema di grandi deviazioni per la misura empirica e per la misura empirica di coppia.
3) Verificare che $I_\rho(\nu) < I^2_\rho(\nu)$ e darne una spiegazione.