RW2: Coefficienti Binomiali e prima visita a 1.

Punto 1.

Introduciamo una generalizzazione del coefficiente binomiale standard, cioè calcolato con parametri in $\mathbb{N}$ (vd. Feller 1 pg.50 e segg.). Definiamo $\forall r \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}$:

$$\binom{x}{r} := \frac{x(x-1)\cdots(x-r+1)}{r!} \;,\; \binom{x}{0} := 1 \;,\; \binom{x}{r} := 0 \;\forall r < 0$$

Vediamo alcune proprietà dell'oggetto appena definito:

(a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{r} = 0$ se $r > n$ oppure se $r < 0$, risulta poi dalla definizione: $\binom{-1}{r} = (-1)^r$ e $\binom{-2}{r} = (-1)^r(r+1)$

(b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{N}$ si ha $\binom{x}{r-1} + \binom{x}{r} = \binom{x+1}{r}$

(c) $\forall a \in \mathbb{R}$ e $\forall t \in (-1, 1)$ vale la seguente 'formula binomiale di Newton':

$$(1+t)^a = 1 + \binom{a}{1}t + \binom{a}{2}t^2 + \binom{a}{3}t^3 + \cdots$$

Notiamo che nella proprietà (c) stiamo considerando una serie che è:

· infinita qualora $a \notin \mathbb{N}$ ed in particolare avremo $(1+t)^a = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{a}{r} t^r$

· finita nel caso in cui $a \in \mathbb{N}$ e questo per la proprietà (a)

· la serie geometrica qualora $a = -1$, $\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + t^4 + \cdots$

La dimostrazione delle proprietà a) e b) segue immediatamente dalla definizione. Per la formula binomiale di Newton, vedi un testo di calcolo.

Punto 2.

Siano X_i, i.i.d.r.v. con $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{2}$. Sia $S_0 := 0$, e per ogni $n \in \mathbb{N}$, $S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$. Per determinare la distribuzione di $T := \inf\{n \geq 1 : S_n = 1\}$ si proceda come in [W], sezione 10.12.

Punto 3.

Applichiamo la proprietà (c) dei coefficienti binomiali alla funzione $\sqrt{1-\alpha^2}$, otteniamo:

$$\sqrt{1-\alpha^2} = 1 + \binom{\frac{1}{2}}{1}\left(-\alpha^2\right) + \binom{\frac{1}{2}}{2}\left(-\alpha^2\right)^2 + \cdots$$

da cui la formula c) di [W] pg.103, diventa:

$$\mathbb{E}\left(\alpha^T\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \mathbb{P}\left(T = n\right) = \alpha^{-1}\left(1 - \sqrt{1-\alpha^2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} \left(-1\right)^{n+1} \alpha^{2n-1}$$

da cui per confronto otteniamo:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(T = 2n-1\right) = \left(-1\right)^{n+1}\binom{\frac{1}{2}}{n} = \frac{1}{n!}\left(-1\right)^{n+1}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right) = \\
&= \frac{1}{n!}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(2-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(n-1-\frac{1}{2}\right) = \\
&= \frac{1}{n!}\frac{1}{2^n}\left(2-1\right)\left(4-1\right)\cdots\left(2(n-1)-1\right) = \\
&= \frac{1}{n!}\frac{1}{2^n}\frac{(2(n-1))!}{2^{n-1}(n-1)!} = \frac{1}{n!}\frac{1}{2^{2n-1}}\frac{(2(n-1))!}{(n-1)!} = \\
&\frac{1}{2^{2n-1}}\frac{1}{n}\binom{2(n-1)}{(n-1)}
\end{aligned}$$

Punto 4.

Ora calcoliamo $\mathbb{E}\left(T\right)$:

$$\mathbb{E}\left(T\right) = \sum_{n=0}^{\infty} n\mathbb{P}\left(T = n\right)$$

poichè

$$\mathbb{P}\left(T = n\right) \sim \frac{1}{2^{2n-1}}\frac{1}{n}\frac{\left(2(n-1)\right)^{2(n-1)}}{(n-1)^{2(n-1)}}\frac{e^{-2(n-1)}}{e^{-2(n-1)}} \sim \frac{1}{2^{2n-1}}\frac{1}{n}2^{2(n-1)} \sim \frac{1}{2n}$$

otteniamo $\mathbb{E}\left(T\right) = \infty$.