Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2002/2003

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

Prima prova d'esonero (16-04-03)

CORREZIONE

Esercizio 2.

2.1. Primo metodo. La matrice A è nilpotente di ordine 2. Infatti $A^2 = 0$. Del resto questo si può ottenere anche ragionando nel modo seguente.

Gli autovalori di A sono le soluzioni dell'equazione

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = (1-\lambda)(-1-\lambda) + 1 = \lambda^2 - 1 + 1 = \lambda^2 = 0,$$

quindi lo spettro $\Sigma(A)$ di A è costituito da un unico autovalore $\lambda = 0$, con molteplicità 2. Poiché è sempre possibile scrivere $A = S + N$, con S semisemplice e N nilpotente tali che $[S, N] = 0$, nel nostro caso risulta $S = 0$ (poiché $\Sigma(A) = \{0\}$), e quindi $A = N$ è nilpotente.

La soluzione del sistema è dato da

$$x(t) = e^{At} x(0) = (\mathbb{1} + At)\, x(0) = \begin{pmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{pmatrix} x(0),$$

dove $x(0) = (1, 1)$. Quindo la soluzione è $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$, con

$$\begin{cases} x_1(t) = 1 + 2t, \\ x_2(t) = 1 - 2t. \end{cases}$$

2.2. Secondo metodo. Alternativamente si poteva procedere come segue. Poiché $\Sigma(A) = \{0\}$, possiamo cercare direttamente la soluzione nella forma

$$x(t) = e^{0t}(a + bt) = a + bt,$$

che, introdotta in $\dot{x} = Ax$, dà

$$\begin{cases} b_1 = a_1 + b_1 t + a_2 + b_2 t, \\ b_2 = -a_1 - b_1 t - a_2 - b_2 t, \end{cases}$$

che equivale alle due equazioni linearmente indipendenti

$$\begin{cases} b_1 + b_2 = 0, \\ b_1 = a_1 + a_2, \end{cases}$$

da cui si ricava

$$a = (-\beta - \alpha, \alpha), \qquad b = (-\beta, \beta),$$

dove $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si determinano imponendo le condizioni iniziali:

$$x(0) = a = (a_1, a_2) = (1, 1).$$

Quindi si ha

$$\alpha = 1, \qquad \beta = -2,$$

da cui si ottiene, per la soluzione, l'espressione

$$x(t) = (1 + 2t, 1 - 2t),$$

in accordo con il risultato precedente.

<u>ESERCIZIO 4.</u>

4.1. Costante del moto. Si ha

$$H(x, y) = xy\left(x^3 + y^3 - 1\right) = x^4 y + x y^4 - xy,$$

quindi, derivando, si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x} &= 4x^3 y + y^4 - y = y\left(4x^3 + y^3 - 1\right) = -\dot{y}, \\ \frac{\partial H}{\partial y} &= 4xy^3 + x^4 - x = x\left(4y^3 + x^3 - 1\right) = \dot{x}, \end{aligned}$$

così che si ha

$$\dot{H} = \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y}\dot{y} = -\dot{y}\dot{x} + \dot{y}\dot{x} = 0,$$

e quindi H è effettivamente una costante del moto.

4.2. Punti d'equilibrio. I punti d'equilibrio sono i punti (x, y) in cui si annulla il campo vettoriale.

Si ha $\dot{x} = 0$ per $x = 0$ oppure per

$$x^3 + 4y^3 - 1 = 0.$$

Se $x = 0$ l'equazione $\dot{y} = 0$ richiede $y = 0$ oppure

$$4x^3 + y^3 - 1 = y^3 - 1 = 0,$$

da cui si ottiene $y = 1$.

Se invece $x^3 + 4y^3 - 1 = 0$, si ha $\dot{y} = 0$ se $y = 0$, che richiede

$$x^3 + 4y^3 - 1 = x^3 - 1 = 0,$$

i.e. $x = 1$, oppure se

$$4x^3 + y^3 - 1 = 4\left(1 - 4y^3\right) + y^3 - 1 = 3 - 15y^3,$$

che richiede $y = (1/5)^{1/3}$. Il corrispondente valore di x è dato da

$$x^3 = 1 - 4y^3 = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5},$$

da cui si ottiene $x = (1/5)^{1/3}$.

In conclusione i punti d'equilibrio sono i seguenti quattro:

$$P_0 = (0,0), \qquad P_1 = (1,0), \qquad P_2 = (0,1), \qquad P_3 = \left(\left(\frac{1}{5}\right)^{1/3}, \left(\frac{1}{5}\right)^{1/3}\right).$$

4.3. Stabilità dei punti d'equilibrio. Il sistema linearizzato in un intorno di un punto d'equilibrio (x,y) ha matrice

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3 + 4y^3 - 1 & 12xy^2 \\ -12x^2y & -4y^3 - 4x^3 + 1 \end{pmatrix},$$

così che si ha

$$A(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$A(1,0) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix},$$
$$A(0,1) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix},$$

e quindi i due punti d'equilibrio P_0, P_1 e P_2 sono punti d'equilibrio instabile, dal momento che uno degli autovalori della matrice del sistema linearizzato associato ha parte reale streattamente positiva.

Per il punto P_3 otteniamo

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} -3/5 & 12/5 \\ -12/5 & +3/5 \end{pmatrix},$$

e quindi gli autovalori sono le soluzioni dell'equazione

$$\lambda^2 - \frac{9}{25} + \frac{144}{25} = \lambda^2 + \frac{135}{25},$$

e quindi sono immaginari puri: non possiamo perciò concludere.

Definiamo

$$\Gamma_E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ H(x,y) = E \right\}.$$

Per $E = 0$ si ottiene

$$\Gamma_0 = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3,$$

dove $\mathcal{C}_1$ è la retta $x = 0$, $\mathcal{C}_2$ è la retta $y = 0$ e $\mathcal{C}_3$ è la curva d'equazione

$$y = f(x) = \left(1 - x^3\right)^{1/3}.$$

Il grafico di tale curva si studia facilmente. Innanzitutto si ha

$$\lim_{x \to \pm\infty} = - \mp \infty;$$

inoltre

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = -x^2 \left(1 - x^3\right)^{-2/3},$$

e quindi $f'(x)$ è continua e non positiva per ogni $x \neq 1$, mentre

$$\lim_{x \to 1^{\pm}} f'(x) = -\infty,$$

così che possiamo concludere che la funzione $f(x)$ è definita in $\mathbb{R}$ e decrescente. La tangente è verticale in $x = 1$. Inoltre $f'(x) < 0$ per ogni $x \neq 0$, e $f'(0) = 0$. Quindi $x = 0$ è l'unico punto stazionario per $f(x)$ e sarà un punto di flesso orizzontale, mentre $x = 1$ sarà un punto di fleso verticale.

Questo è confermato anche dallo studio della derivata seconda. Si ha infatti

$$\begin{aligned} f''(x) = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x) &= -2x \left(1 - x^3\right)^{-2/3} - 2x^4 \left(1 - x^3\right)^{-5/3} \\ &= -2x \left(1 - x^3\right)^{-5/3}, \end{aligned}$$

e quindi $f''(x) > 0$ per $x < 0$ e per $x > 1$, mentre $f''(x) < 0$ per $x \in (0,1)$: quindi la funzione $f(x)$ è convessa per $x < 0$ e per $x > 1$, mentre è concava nell'intervallo $(0,1)$. Il grafico della funzione $f(x)$ è rappresentato in Figura 1.

Se consideriamo allora la restrizione di $H(x,y)$ alla regione chiusa $\overline{\mathcal{A}}$, dove $\mathcal{A}$ è l'insieme aperto

$$\mathcal{A} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 < x < 1, 0 < y < f(x) \right\},$$

abbiamo che sulla frontiera $\partial\mathcal{A}$ la funzione $H(x,y)$ vale 0, mentre in P_3 (unico punto stazionario interno) si ha

$$H(P_3) = \left(\frac{1}{5}\right)^{2/3} \left(-\frac{3}{5}\right) < 0,$$

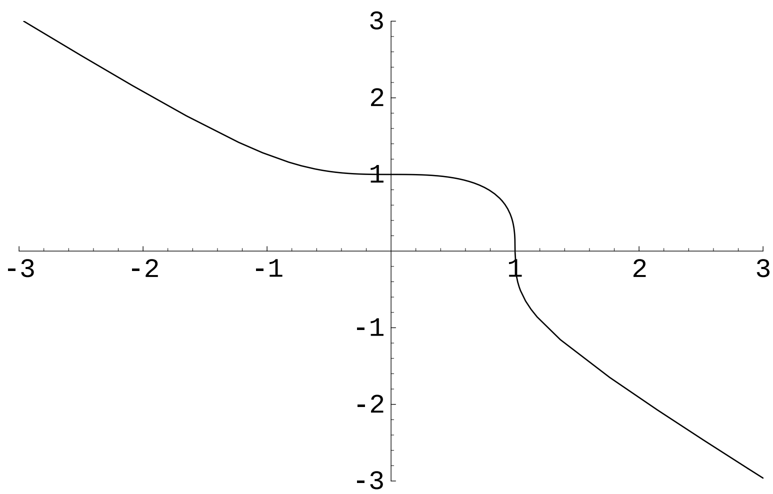

Figura 2. Grafico della funzione $f(x)$.

così che possiamo concludere che il punto P_3 è un punto di minimo per $H(x, y)$.

Possiamo allora definire la funzione di Lyapunov

$$W(x, y) = H(x, y) - H(P_3),$$

e fissare un intorno B del punto P_3 tale che
(1) $W(P_3) = 0$ e $W(x, y) > 0$ $\forall (x, y) \in B \setminus \{P_3\}$;
(2) $\dot{W}(x, y) = \dot{H}(x, y) = 0$.
Sono quindi soddisfatte le condizioni sotto cui è possibile applicare il teorema di Lyapunov, per concludere che il punto P_3 è un punto d'equilibrio stabile.

4.4. Analisi qualitativa delle traiettorie. Per le curve di livello della funzione $H(x, y)$ si ha la situazione rappresentata in Figura 2.

La curva di livello Γ_0 è costituita da 12 orbite: i 3 punti d'equilibrio P_0, P_1 e P_2, e i 9 archi di curva in cui le curve $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ e $\mathcal{C}_3$ sono divise dai punti d'equilibrio.

Per determinare il verso di percorrenza, lungo la curva $\mathcal{C}_1$, definita da $x = 0$, si deve tener conto che lungo tale retta si ha $\dot{x} = 0$ e

$$\dot{y} = -y\left(y^3 - 1\right) \begin{cases} > 0, & \text{se } 0 < y < 1, \\ < 0, & \text{se } y > 1 \text{ oppure } y < 0. \end{cases}$$

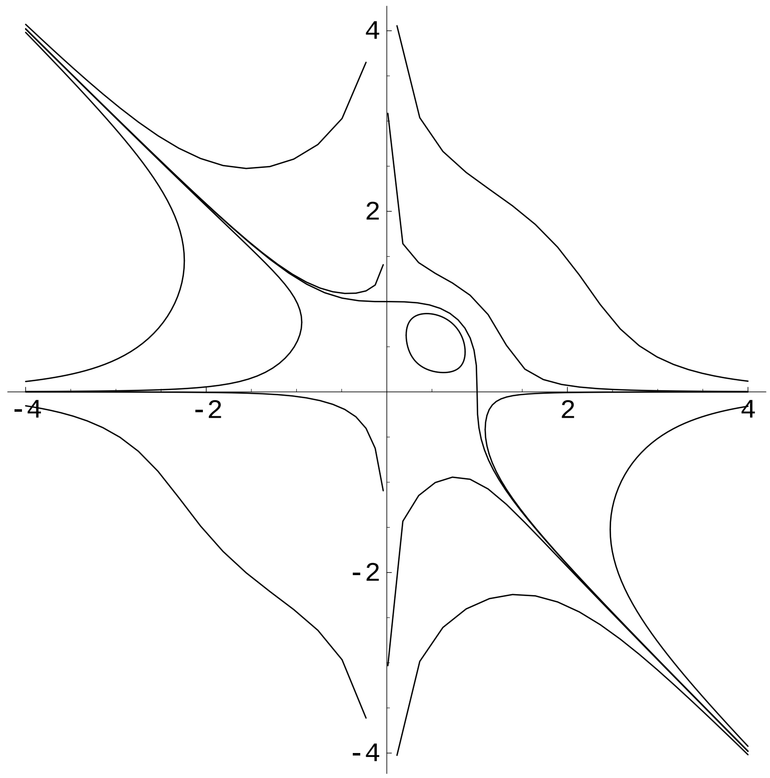

Figura 2. Curve di livello della funzione $H(x,y)$.

Lungo la curva $\mathcal{C}_2$ si ha $\dot{y} = 0$ e

$$\dot{x} = x\left(x^3 - 1\right) \begin{cases} > 0, & \text{se } x > 1 \text{ oppure } x < 0, \\ < 0, & \text{se } 0 < x < 1. \end{cases}$$

Lungo la curva $\mathcal{C}_3$, dove $y^3 = 1 - x^3$, si ha

$$\dot{x} = 3x\left(1 - x^3\right) \begin{cases} > 0, & \text{se } 0 < x < 1, \\ < 0, & \text{se } x > 1 \text{ oppure } x < 0, \end{cases}$$

e il segno di $\dot{y}$ si ricava per consistenza.

Le altre curve di livello e i versi di percorrenza delle orbite corrispondenti si ricavano per continuità.

Nella regione aperta $\mathcal{A} \setminus \{P_3\}$ le traiettorie sono periodiche, e si svolgono su orbite chiuse che contengono il punto P_3 al loro interno. Infatti la regione $\mathcal{A}$ è racchiusa da una componente connessa della curva di livello $\mathcal{A}$ e contiene un punto d'equilibrio stabile al suo interno: possiamo quindi applicare un teorema che garantisce che, sotto tali condizioni, tutti i dati iniziali in $\mathcal{A} \setminus \{P_3\}$ generano traiettorie periodiche.