Tutorato di FM1

7 marzo 2003

1. Risolvere per separazione di variabili le seguenti equazioni differenziali:

a) $u(t)u'(t) = e^{u(t)-t}\sin(t)$

b) $u' = \dfrac{1+2t}{\cos(u(t))}$ con $u(0) = \pi$

c) $u'(t) = (t + u(t))^2 - u(t) - t - 1$ (cercare un cambiamento di variabili opportuno)

2. Sia $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ soluzione dell' equazione

$$x'(t) = Ax(t) + b(t)$$

verificare che la funzione $w(t) = e^{-At}x(t)$ soddisfa

$$w'(t) = b(t)e^{-At}.$$

Determinare quindi l' insieme di tutte e sole le soluzioni $x(t)$ dei seguenti sistemi non omogenei:

a)

$$\begin{cases} x_1' = x_1 - x_2 + t \\ x_2' = x_1 - x_2 - t \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} x_1' = x_2 + t\sin(2t) \\ x_2' = -x_1 - 8t\cos(2t) \end{cases}$$

c) $u'(t) + \dfrac{tu(t)}{1+t^2} = t$

3. Per ciascuna delle seguenti matrici A determinare:

- gli autovalori di A

- gli autospazi generalizzati di A
- la decomposizione in una somma $A = S + N$ con N nilpotente e S semisemplice verificando che valga la relazione $SN - NS = 0$.
- la funzione $t \mapsto \exp(At)$

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$A = \begin{pmatrix} 5 & -10 \\ 2 & -4 \end{pmatrix},$$
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$
$$A = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix},$$
$$A = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix},$$

4. Sia $u(t) = (x(t), y(t))$ tale che $u(0) = (\sqrt{2}, 0)$ e che

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{1}{2}x(t) + \frac{5}{2}y(t) \\ y'(t) = \frac{5}{2}x(t) + \frac{1}{2}y(t) \end{cases}$$

dire se esiste un cambiamento di coordinate che trasforma la matrice associata al sistema in una matrice diagonale, quindi determinare $u(t)$, le equazioni cartesiane dell' immagine e l' andamento qualitativo di $|u'(t)|$.

5. Sia $u(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ la curva in $\mathbb{C}^3$ che soddisfa

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) \\ x_2'(t) = x_3(t) \\ x_3'(t) = -x_2(t) \end{cases}$$

con $u(0) = (1, 1, 1)$. Trovare esplicitamente $u(t)$ e dire se anche soluzione del problema analogo in $\mathbb{R}^3$.