

Tutorato di FM1

10 Aprile 2003

1. Dato il sistema planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - x - x^3 \\ \dot{y} = y + 3yx^2 - 4x^3 \end{cases}$$

- Trovare una costante del moto $H(x, y)$.
- Determinare i punti di equilibrio e l'insieme dei dati che danno luogo ad orbite periodiche.
- Calcolare esplicitamente le soluzioni con dato iniziale $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
- Considerare il sistema planare ottenuto aggiungendo al campo vettoriale del sistema la funzione $G(x, y) = (0, y)$ e mostrare che l'insieme $\{(x, y) : x^3 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 1\}$ non è positivamente invariante per tale sistema.

2. Dato il sistema planare

$$\begin{cases} \dot{x} = x^3 + 3y^2x - x \\ \dot{y} = -y^3 - 3x^2y + y \end{cases}$$

- Determinare una funzione $H(x, y)$ costante del moto.
- Studiare i punti di equilibrio, l'andamento qualitativo delle orbite e individuare l'insieme dei punti che danno luogo ad orbite periodiche.
- Considerare il sistema planare ottenuto aggiungendo al campo vettoriale del sistema la funzione $G(x, y) = (0, -\alpha y)$: determinare α in modo che l'origine diventi un punto di equilibrio asintoticamente stabile e mostrare che per tali valori di α il cerchio unitario è positivamente invariante.

3. Considerare il sistema planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x^2 - x^3 - 2y \\ \dot{y} = -4xy - 3x^2y \end{cases}$$

- a) Trovare una costante del moto.
- b) Discutere l' andamento qualitativo delle orbite.