

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2002/2003
FM3 - Meccanica lagrangiana e hamiltoniana

PROVA SCRITTA (23-06-03)

ESERCIZIO 1. Si discuta il principio di d'Alembert.

ESERCIZIO 2. Si consideri il sistema lagrangiano costituito da un punto materiale P di massa $m = 1$, vincolato a muoversi in un piano verticale (x, y) , lungo il profilo di equazione $y = x^2$, che ruota intorno all'asse verticale con velocità angolare costante $\omega \in \mathbb{R}$. Il punto è inoltre sottoposto alla forza di gravità ed è collegato all'estremo di una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla: l'altro estremo della molla è fissato nell'origine.

(2.1) Si scriva la lagrangiana del sistema.

(2.2) Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.

(2.3) Si determinino le eventuali configurazioni d'equilibrio nel sistema di riferimento solidale con il piano rotante al variare del parametro ω .

(2.4) Se ne discuta la stabilità.

(2.5) Si determini la forza vincolare che agisce sul punto P in corrispondenza di una posizione d'equilibrio stabile (se esiste) per i valori dei parametri $\omega = \sqrt{11}$, $g = 1$ e $k = 1$.

ESERCIZIO 3. Funzioni generatrici indipendenti dal tempo.

ESERCIZIO 4. Si consideri il sistema unidimensionale costituito da un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto a una forza di energia potenziale

$$U(q) = \frac{1}{2n}q^{2n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(4.1) Se ne scriva la lagrangiana.

(4.2) Si determinino la hamiltoniana e le corrispondenti equazioni di Hamilton.

(4.3) Si riscriva la hamiltoniana in termini delle variabili azione-angolo.

(4.4) Si trovi il periodo corrispondente in funzione dell'azione.