UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GEOMETRIA 1

Prova scritta del 16-9-2003 - a.a. 2002-2003

1. Sia V uno spazio vettoriale, U, W due suoi sottospazi.

(a) Si enunci il risultato che relaziona le dimensioni di $U \cap W$ e di $U + W$;

(b) si dimostri tale risultato.

2. Determinare per quali valori $h \in \mathbb{R}$, è (o no) compatibile il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + X_4 = 0 \\ hX_1 - X_3 + X_4 = 0 \\ X_1 + hX_3 - X_4 = 0 \\ hX_1 + X_2 + X_3 = 0 \end{cases}$$

e calcolarne esplicitamente le soluzioni.

3. Siano a e b due numeri reali e si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix}.$$

Si determinino i valori di a e b per i quali A è (o no) invertibile e, in tal caso, si calcoli, con sole operazioni elementari, l'inversa.

4. Siano k un numero reale, $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ y - x = 0 \end{cases}$$

e $U_k \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale

$$U_k =< (1,0,1,2),\ (1,0,0,1),\ (0,0,1,k) > .$$

(a) Si determinino due basi di W e U_k;

(b) si determinino le dimensioni di $U_k + W$ e di $U_k \cap W$;

(c) si determinino (se esistono) i valori di k per i quali

$$U_k \oplus W = \mathbb{R}^4.$$

5. Sia A uno spazio affine di dimensione n, sia $O, e_1, e_2, \ldots, e_n$, un riferimento affine.

(a) Si definisca la nozione di parallelismo tra due sottospazi affini di A;

(b) sia $n = 3$ e siano r una retta e p un piano in A. Si enunci la proposizione che caratterizza il parallelismo o l'incidenza di r e p in funzione delle loro equazioni;

(c) si dimostri tale proposizione.

6. Sia A uno spazio affine di dimensione 3, sia O, e_1, e_2, e_3, un riferimento affine e si considerino le tre rette di equazioni parametriche seguenti:

$$r_1 : \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}, r_2 : \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = s \end{cases}, r_3 : \begin{cases} x = 2 \\ y = u \\ z = 0 \end{cases}.$$

(a) Esiste un piano che contiene tutte e tre le rette?

(b) Determinare le equazioni di tutti i piani p tali che $r_1 \subset p, r_2 \not\subset p, r_3 \not\subset p$.

7. Sia M_2 lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 e $F : M_2 \to M_2$ l'applicazione definita da

$$F(A) = A^t.$$

(a) Dimostrare che F è lineare e calcolare una matrice di F;

(b) determinare $N(F), Im(F)$ e le loro dimensioni;

(c) determinare per quali A si ha che F è iniettiva.

8. Siano $v_1 = (0, 0, 1, 1), v_2 = (0, 1, 1, 0) \in \mathbb{R}^4$ e sia $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare tale che $< v_1, v_2 > \subset N(F), F(E_4) = E_3, F(E_1) = cE_1$ per qualche numero reale c, dove E_1, E_2, E_3, E_4 è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.

(a) Determinare una matrice di F;

(b) trovare basi per gli autospazi di F;

(c) determinare i valori di c per i quali F è diagonalizzabile.