UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GEOMETRIA 1

Prova scritta del 10-7-2003 - a.a. 2002-2003

1. (a) Si definiscano rango e determinante di una matrice;

(b) si enunci il risultato che relaziona rango, determinante ed invertibilità di una matrice;

(c) si dimostri tale risultato.

2. Determinare per quali valori $h \in \mathbb{R}$, è (o no) compatibile il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + hX_4 = 0 \\ hX_1 - X_3 + X_4 = h \\ X_1 + 2X_3 - X_4 = 0 \\ hX_1 + X_2 + X_3 = 0 \end{cases}$$

e calcolarne esplicitamente le soluzioni.

3. Siano a e b due numeri reali e si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si determinino i valori di a e b per i quali A è (o no) invertibile e, in tal caso, si calcoli, con sole operazioni elementari, l'inversa.

4. Sia k un numero reale e sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 4 con base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Siano

$$v_1 = e_1 - e_2 + e_4, v_2 = e_1 + e_2 + e_4, v_3 = ke_1 - e_2, v_4 = e_2 + 2e_3.$$

(a) Sia $U =< v_1, v_2, v_3, v_4 >$ il sottospazio generato da essi. Si calcoli la dimensione di U;

(b) si determini un sottospazio W di V tale che

$$U \oplus W = V;$$

(c) siano

$$u_k = e_1 - ke_2, v_k = ke_1 + ke_2.$$

Si determinino (se esistono) i valori di k per i quali $dim U \cap < u_k, v_k >= 1$.

5. Siano V, W due spazi vettoriali reali e $F : V \to W$ un'applicazione lineare.

(a) Si definiscano il nucleo e l'immagine di F e se ne indichino le proprietà;

(b) si enunci il teorema di omomorfismo tra spazi vettoriali;

(c) si dimostri tale risultato.

6. Sia a un numero reale e sia A uno spazio affine di dimensione 4 su uno spazio vettoriale reale V e sia O, e_1, e_2, e_3, e_4 un riferimento affine. Si considerino i punti $A(1,-1,0,1)$, $B(0,1,-1,0)$, $C(1,0,-1,0)$. Si determinino (se esistono o si dimostri che non esistono):

(a) le equazioni della retta passante per il punto A e parallela alla retta $\overline{BC}$;

(b) le equazioni del piano passante per il punto $P(1,2,0,1)$ e parallelo al piano $\overline{ABC}$;

(c) l'equazione dell'iperpiano affine H individuato dai punti P, A, B, C.

7. Siano V e W due spazi vettoriali reali di dimensione finita e siano $F, G : V \to W$ due applicazioni lineari tali che $N(F) \subseteq N(G), ImF \subseteq ImG$.

(a) Dimostrare che $ImF = ImG$ e far vedere con un esempio che non è detto che $F = G$;

(b) se $dimImF = 2$ segue necessariamente che $F = G$?

8. Sia a un numero reale e sia $A \in M_3(\mathbb{R})$ la seguente matrice: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$.

(a) Calcolare il polinomio caratteristico di A;

(b) determinare i valori di a per i quali A è diagonalizzabile;

(c) per i valori di a per i quali A è diagonalizzabile, trovare una matrice invertibile M tale che $M^{-1}AM$ è diagonale.