Universitá degli Studi di Roma Tre - Dipartimento di Matematica
Corso di GE1 del Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2003/2004
Docente: Prof. A. Lopez - Esercitatore: Dott.ssa T. Vistarini - Tutore: M. Nesci

Lavoro guidato del 7/3/2003

1.1 Calcolare

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

1.2 In ognuno dei casi seguenti trovare (AB)C e A(BC):

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \mathcal{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{C} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \mathcal{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1.3 Siano A,B matrici quadrate di uguali dimensioni e si supponga $AB = BA$. Dimostrare che

$$(A + B)^2 = A^2 = 2AB + B^2$$

e che

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2.$$

1.4 Sia una matrice invertibile $n \times n$. Dimostrare che

$$^t(A^{-1}) = (^tA)^{-1}.$$

1.5 Sia A una matrice strettamente triangolare superiore $n \times n$,

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Dimostrare che $A^n = O$. Fare la dimostrazione nel caso $n = 2, 3, 4$.(Facoltativo) Dimostrarlo nel caso generale usando il metodo dell'induzione.

1.6 Sia $A = (a_{ij})$ una matrice quadrata $n \times n$. Si definisce la sua traccia , denotata con Tr(A), la somma dei suoi elemnti diagonali,

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

Determinare la traccia delle matrici A, B, AB, BA:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1.7 Siano A e B matrici nilpotenti aventi le stesse dimensioni e tali che $AB = BA$. Dimostrare che le matrici AB e $A + B$ sono nilpotenti.

1.8 Siano A, B matrici $n \times n$. Dimostrare che $tr(AB) = tr(BA)$. Se B e' invertibile, dimostrare che $tr(B^{-1}AB) = tr(A)$.