Universitá degli Studi di Roma Tre - Dipartimento di Matematica
Corso di GE1 del Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2002/2003

Docente: Prof. A. Lopez - Esercitatore: Dott. T. Vistarini - Tutore: M. Nesci

Esercitazione del 29/05/2003

1.1 Sia $A \in M_2(\mathbb{R})$ la seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

trovare una matrice $P \in GL_2(\mathbb{R})$ tale che :

$$D = P^{-1}AP$$

con D matrice diagonale.

1.2 Sia $A \in M_4(\mathbb{R})$ la seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ a+1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

trovare per quali valori reali del parametro a esiste una matrice $P \in GL_4(\mathbb{R})$ tale che

$$D = P^{-1}AP$$

con D matrice diagonale.
Trovare P per uno dei valori di a trovati.

1.3 Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, rappresentato rispetto alla base canonica dalla seguente matrice M:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

determinare la matrice $M^{'}$ rispetto alla base $B = (v_1, v_2, v_3)$,

$$v_1 = (1, 1, -1) v_2 = (1, 0, 1) v_3 = (1, 1, 0).$$

Determinare nucleo e immagine dell'applicazione.
Determinare autovalori e basi per gli autospazi.
Verificare se e' diagonalizzabile.

1.4 Sia $f : \mathbb{R}^3 \to M_2(\mathbb{R})$, applicazione definita nel seguente modo : $\forall v \in \mathbb{R}^3$, $v = (a, b, c)$

$$(f(v)) = \begin{pmatrix} a & a+b \\ a+b+c & 0 \end{pmatrix},$$

mostrare che f e' un'applicazione lineare.
Determinare il nucleo di f.
Determinare l'immagine di f e un suo supplementare in $M_2(\mathbb{R})$.

1.5 Dimostrare che in uno spazio affine di dimensione n, un sottospazio affine di dimensione $p < n$ e' l'intersezione di $n - p$ iperpiani affini

1.6 Sia $\mathbb{R}^4$, $O, (e_1, e_2, e_3, e_4)$.
Siano r_1, r_2, r_3, le tre rette di equazione rispettivamente:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - 1 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + 1 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 1 - x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2 = 0 \\ x_3 - 2 - x_4 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 + t \\ x_2 = 1 - t \\ x_3 = 2 + t \\ x_4 = -1 - t \end{cases},$$

scrivere l'equazione dell'iperpiano affine H passante per $P_1(1, -1, 1, -1)$, $P_2(-1, 1, -1, 1)$ e per la retta affine r_1.
Determinare il sottospazio affine che contiene le rette affini r_1 e r_2.
Determinare, se esiste, una terna di punti allineati $P \in r_1$,$Q \in r_2$,$R \in r_3$, e trovare la retta passante per essi.