Universitá degli Studi di Roma Tre - Dipartimento di Matematica
Corso di GE1 del Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2003/2004
Docente: Prof. A. Lopez - Esercitatore: Dott. T. Vistarini - Tutore: M. Nesci

Tutorato del 4/4/2003

1.1 Calcolare il rango delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 11 & 7 \\ 3 & 6 & 3 & 18 & 9 \end{pmatrix}$$

1.2 Dire quali delle seguenti affermazioni e' falsa, giustificando la scelta anche con esempi. Giustificare perche' si considerano le altre vere:
1) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n. Allora ogni n-upla $b_1, \ldots, b_n$ di vettori linearmente indipendenti e' una base di V.
2) Siano $d_1, \ldots, d_n$ elementi di uno spazio vettoriale V e siano $b_1, \ldots, b_n$ elementi del sottospazio $< d_1, \ldots, d_n >$.
Allora

$$< b_1, \ldots, b_n > \subseteq < d_1, \ldots, d_n >$$

3) L'intersezione di due sottospazi vettoriali di V e' un sottospazio di V.
4) L'unione di due sottospazi vettoriali di V e' un sottospazio vettoriale di V.

1.3 Quale dei seguenti insiemi di vettori e' una base per $\mathbb{R}^3$:

$$1)(1,0,1),\ (0,1,0),\ (2,2,2)$$

$$2)(1,\sqrt{2},\sqrt{2}),\ (\sqrt{2},2,2),\ (2\sqrt{2},4,4)$$

$$3)(2,2,2),\ (1,2,2),\ (1,1,2)$$

$$4)(105,111,90),\ (776,98,99)$$

1.4 Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e siano $b_1, \ldots, b_m$ elementi di V. Quale delle seguenti affermazioni e' falsa e spiegarne il motivo. Spiegare perche' si ritengono vere le altre:

1) Se $b_1, \dots, b_m$ sono linearmente indipendenti allora $m \leq n$ ed esistono vettori $b_{m+1}, \dots, b_n$ tali che $b_1, \dots, b_n$ sono una base di V.
2) $b_1, \dots, b_m$ sono generatori di $< b_1, \dots, b_m >$.
3)

$$< b_1, \dots, b_m > = < b_1, b_1 + b_2, b_1 + b_2 + b_3, \dots, b_1 + b_2 + \dots + b_m > .$$

4) Una delle altre affermazioni e' falsa.

1.5 In quale delle seguenti coppie di matrici la seconda non e' ottenuta dalla prima con l'applicazione di operazioni elementari sulle righe:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$