UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GEOMETRIA 1

Prova scritta del 17-6-2003 - a.a. 2002-2003

1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e W un suo sottospazio.

(a) Si enunci il risultato che relaziona le dimensioni di V e di W;

(b) si dimostri tale risultato.

2. Determinare per quali valori $h \in \mathbb{R}$, è (o no) compatibile il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 + hX_2 + hX_4 = 0 \\ hX_1 + X_3 + X_4 = 1 \\ -X_1 + 2X_3 - X_4 = 0 \\ hX_1 + X_2 + hX_3 = 1 \end{cases}$$

e calcolarne esplicitamente le soluzioni.

3. Sia a un numero reale e si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si determinino i valori di a per i quali A si può esprimere come prodotto di matrici elementari e si scriva esplicitamente tale prodotto.

4. Sia k un numero reale e sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 4 con base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Siano

$$v_1 = e_1 - e_4, v_2 = e_2 - e_3, v_3 = e_1 + ke_2, v_4 = ke_2 + e_3.$$

(a) Siano $U =< v_1, v_2 >, W =< v_1, v_3, v_4 >$ i sottospazi generati. Si calcoli la dimensione di U e di W;

(b) si determini se esistono valori di k tali che $U \subset W$;

(c) si determini se esistono valori di k tali che $dim U \cap W = 2$.

5. (a) Si definiscano le nozioni di spazio e sottospazio affine;

(b) si enunci il risultato che relaziona l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare con i sottospazi affini;

(c) si dimostri tale risultato.

6. Sia a un numero reale e sia A uno spazio affine di dimensione 3 su uno spazio vettoriale reale V e sia O, e_1, e_2, e_3 un riferimento affine. Si considerino i tre piani di equazione:

$$\pi_1 : 7X_1 + 4X_2 + 7X_3 + 1 = 0; \pi_2 : 2X_1 - X_2 - X_3 + 2 = 0; \pi_3 : X_1 + 2X_2 + 3X_3 = a.$$

(a) si determinino i valori di a per i quali i tre piani appartengono allo stesso fascio;

(b) per tali valori di a si scrivano le equazioni della retta comune in forma parametrica;

(c) si determinino i valori di a per i quali esiste un piano parallelo a π_3 ma che non interseca $\pi_1 \cap \pi_2$.

7. Siano V e W due spazi vettoriali reali di dimensione finita, $F : V \to W$ un'applicazione lineare. Supponiamo che $\dim W \geq \dim N(F)$.

(a) Si determini un'applicazione lineare $G : V \to W$ tale che $N(F) \cap N(G) = \{0\}$;

(b) Si determini un'applicazione lineare $G : V \to W$ tale che $N(F) \oplus N(G) = V$;

(c) Si determini un'applicazione lineare $G : V \to W$ tale che $V/N(F) \cong V/N(G)$.

8. Sia a un numero reale e sia $A \in M_3(\mathbb{R})$ la seguente matrice: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$.

(a) Calcolare il polinomio caratteristico di A;

(b) trovare basi per gli autospazi di A;

(c) determinare i valori di a per i quali A è diagonalizzabile.

SOLUZIONI

1. (a) e (b) [Sernesi, Corollario 4.17].

2. Risolviamo l'esercizio con il metodo di Gauss-Jordan eseguendo operazioni elementari sulle righe della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & h & 0 & h & 0 \\ h & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ h & 1 & h & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Con le operazioni $R_2 \to R_2 - hR_1, R_3 \to R_3 + R_1, R_4 \to R_4 - hR_1$ otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & h & 0 & h & 0 \\ 0 & -h^2 & 1 & 1-h^2 & 1 \\ 0 & h & 2 & h-1 & 0 \\ 0 & 1-h^2 & h & -h^2 & 1 \end{pmatrix}$$

e scambiando R_2 ed R_3 si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & h & 0 & h & 0 \\ 0 & h & 2 & h-1 & 0 \\ 0 & -h^2 & 1 & 1-h^2 & 1 \\ 0 & 1-h^2 & h & -h^2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Con le operazioni $R_3 \to R_3 + hR_2, R_4 \to R_4 + hR_2$ otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & h & 0 & h & 0 \\ 0 & h & 2 & h-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+2h & 1-h & 1 \\ 0 & 1 & 3h & -h & 1 \end{pmatrix}$$

e scambiando R_2 ed R_4 si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & h & 0 & h & 0 \\ 0 & 1 & 3h & -h & 1 \\ 0 & 0 & 1+2h & 1-h & 1 \\ 0 & h & 2 & h-1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Con $R_4 \to R_4 - hR_2$ si ha la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & h & 0 & h & 0 \\ 0 & 1 & 3h & -h & 1 \\ 0 & 0 & 1+2h & 1-h & 1 \\ 0 & 0 & 2-3h^2 & h^2+h-1 & -h \end{pmatrix}.$$

Ora se $1+2h \neq 0$, cioè se $h \neq -\frac{1}{2}$, eseguiamo l'operazione $R_3 \to \frac{1}{1+2h}R_3$ ottenendo

$$\begin{pmatrix} 1 & h & 0 & h & 0 \\ 0 & 1 & 3h & -h & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1-h}{1+2h} & \frac{1}{1+2h} \\ 0 & 0 & 2-3h^2 & h^2+h-1 & -h \end{pmatrix}$$

che, con $R_4 \to R_4 - (2-3h^2)R_3$ da

$$\begin{pmatrix} 1 & h & 0 & h & 0 \\ 0 & 1 & 3h & -h & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1-h}{1+2h} & \frac{1}{1+2h} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-h^3+6h^2+h-3}{1+2h} & \frac{h^2-h-2}{1+2h} \end{pmatrix}.$$

Sia h_0 una radice del polinomio $-h^3+6h^2+h-3$; si verifica subito che h_0 non è una radice del polinomio h^2-h-2, quindi, per $h = h_0$ il sistema è incompatibile. Supponiamo ora $h \neq h_0$ e poniamo per semplicità $A = \frac{-h^3+6h^2+h-3}{1+2h}, B = \frac{h^2-h-2}{1+2h}$. Allora $A \neq 0$, quindi il sistema è a gradini e sostituendo via via si calcola l'unica soluzione

$$x_1 = \frac{-hB}{A} - h + \frac{3h^2}{1+2h} - \frac{3Bh^2}{A(1+2h)} - \frac{h^2B}{A},\ x_2 = 1 + \frac{hB}{A} - \frac{3h}{1+2h} + \frac{3Bh}{A(1+2h)},$$

$$x_3 = \frac{1}{1+2h} - \frac{B(1-h)}{A(1+2h)},\ x_4 = \frac{B}{A}.$$

Se invece $h = -\frac{1}{2}$ la matrice M diventa

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{5}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

da cui, scambiando R_3 ed R_4 si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{5}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e dividendo R_3 per $\frac{5}{4}$ si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

che rappresenta un sistema a gradini con l'unica soluzione

$$x_1 = \frac{9}{5},\ x_2 = \frac{13}{5},\ x_3 = \frac{7}{5},\ x_4 = 1. \blacksquare$$

3. Ricordiamo che una matrice è invertibile se e solo se è prodotto di matrici elementari, quindi A si può esprimere come prodotto di matrici elementari se e solo se

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2a^2 + a - 1 \neq 0$$

Dato che ciò accade per ogni a reale ne segue che A è sempre prodotto di matrici elementari.
Ora fattorizziamo A in prodotto di matrici elementari.
L'operazione $R_2 \to R_2 - R_1$ da la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & -a \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e l'operazione $R_3 \to R_3 - 2R_1$ da la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & -a \\ 0 & -2 & 1-2a \end{pmatrix}$$

da cui, scambiando R_2 con R_3 si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & 1-2a \\ 0 & a-1 & -a \end{pmatrix}.$$

Dividendo R_2 per -2 si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & a-\frac{1}{2} \\ 0 & a-1 & -a \end{pmatrix}$$

e l'operazione $R_3 \to R_3 - (a-1)R_2$ da la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & a-\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -a^2+\frac{1}{2}a-\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

e dividendo R_3 per $-a^2+\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}$ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & a-\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'operazione $R_2 \to R_2 - (a-\frac{1}{2})R_3$ da la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e l'operazione $R_1 \to R_1 - aR_3$ da la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_1 \to R_1 - R_1$ si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ricordiamo che fare operazioni elementari su una matrice equivale a moltiplicarla a sinistra per la matrice elementare corrispondente. Con la notazione del [Sernesi, par. 3.6] abbiamo allora mostrato che

$$R_{12}(-1)R_{13}(-a)R_{23}(-a+\frac{1}{2})R_3(-a^2+\frac{1}{2}a-\frac{1}{2})R_{32}(-a+1)R_2(-\frac{1}{2})R_{23}R_{31}(-2)R_{21}(-1)A =$$

$= I_3$
da cui
$A =$

$$R_{12}(-1)^{-1}R_{13}(-a)^{-1}R_{23}(-a+\frac{1}{2})^{-1}R_3(-a^2+\frac{1}{2}a-\frac{1}{2})^{-1}R_{32}(-a+1)^{-1}R_2(-\frac{1}{2})^{-1}R_{23}^{-1}$$

$R_{31}(-2)^{-1}R_{21}(-1)^{-1}$
cioè

$$A = R_{12}(1)R_{13}(a)R_{23}(a-\frac{1}{2})R_3(a^2-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2})R_{32}(a-1)R_2(\frac{1}{2})R_{23}R_{31}(2)R_{21}(1). \blacksquare$$

4. (a) Il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

è 2, quindi $dimU = 2$, mentre il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & k & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

è 3, quindi $dimW = 3$. (b) Per come sono definiti si vede che $U \subset W$ se e solo se $v_2 \in W$, quindi se e solo se il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & k & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

è 3. Dato che $detA = -k-1$ si vede che $r(A) = 3$ se e solo se $k = -1$. (c) Notiamo che $U \cap W \subset U$ quindi $dimU \cap W = 2$ se e solo se $U \cap W = U$, cioè se e solo se $U \subset W$, quindi, per (b) se e solo se $k = -1$. $\blacksquare$

5. (a) [Sernesi, Def. 7.1 e 7.4]; (b) e (c) [Sernesi, Teorema 8.1].

6. (a) I tre piani appartengono allo stesso fascio se e solo se l'equazione di uno è combinazione lineare delle equazioni degli altri due, quindi se e solo se il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 7 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -a \end{pmatrix}$$

è 2. Ora

$$\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -15$$

quindi, per il principio dei minori orlati, il rango di A è 2 se e solo se

$$\begin{vmatrix} 7 & 4 & 7 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -a \end{vmatrix} = 0.$$

Il primo determinante è 0, mentre il secondo è $15a - 15$ che è nullo se e solo se $a = 1$. (b) La retta comune r ha equazioni cartesiane

$$\begin{cases} 7X_1 + 4X_2 + 7X_3 + 1 = 0 \\ 2X_1 - X_2 - X_3 + 2 = 0 \end{cases}$$

quindi, per [Sernesi 10.11] un vettore parallelo ad essa è dato dai minori 2×2 della matrice

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 & 7 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si ottiene dunque $v(3, 21, -15)$ oppure, equivalentemente, $w(1, 7, -5)$. Posto $x_3 = 0$ risolvendo il sistema di r si trova il punto $x_1 = -\frac{3}{5}$, $x_2 = \frac{4}{5}$, $x_3 = 0$. Le equazioni parametriche di r sono dunque

$$\begin{cases} X_1 = t - \frac{3}{5} \\ X_2 = 7t + \frac{4}{5} \\ X_3 = -5t \end{cases}.$$

(c) Notiamo che, per (a), π_3 è parallelo ad r e la contiene se e solo se $a = 1$. Un piano parallelo a π_3 avrà equazione $X_1 + 2X_2 + 3X_3 = b$, per qualche b. Dunque, qualsiasi sia a, basterà scegliere $b = a$ se $a \neq 1$, $b \neq 1$ se $a = 1$. ∎

7. Sia $\{e_1, \ldots, e_k\}$ una base di $N(F)$ e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base di V che completa la precedente, $\{w_1, \ldots, w_m\}, m \geq k$, una base di W. (a) e (b) Utilizzando il Teorema 11.3 di [Sernesi] poniamo

$$G(e_i) = \begin{cases} w_i & \text{per } 1 \leq i \leq k \\ 0 & \text{per } k+1 \leq i \leq n \end{cases}.$$

Dato che $w_1, \ldots, w_k$ sono linearmente indipendenti si deduce che $r(G) = k$ e quindi per [Sernesi, Teorema 11.6] $dim N(G) = n - k$. Ma, per come è definita G, è ovvio che $< e_{k+1}, \ldots, e_n > \subset N(G)$, quindi, per l'uguaglianza delle dimensioni, $< e_{k+1}, \ldots, e_n >= N(G)$. Ne segue che $N(F) \cap N(G) = \{0\}$ e che $N(F) \oplus N(G) = V$. (c) Una soluzione ovvia è $G = F$. Se invece vogliamo $G \neq F$ osserviamo che, per il teorema dell'omomorfismo, $r(F) = dim V/N(F) = dim V/N(G) = r(G)$. Se supponiamo per esempio $F(e_1) \neq F(e_2)$ e poniamo

$$G(e_1) = F(e_2), G(e_2) = F(e_1) \text{ e } G(e_i) = F(e_i) \text{ per } 3 \leq i \leq n$$

si vede facilmente che $ImF = ImG$, quindi, sempre per il teorema dell'omomorfismo, $V/N(F) \cong V/N(G)$. ■

8. (a) Il polinomio caratteristico di A è

$$P_A(T) = \begin{vmatrix} 1-T & 0 & 2 \\ 0 & 1-T & 1 \\ 1 & 1 & a-T \end{vmatrix} = (1-T)[T^2-(1+a)T+a-3].$$

(b) e (c) Allora, dato che $a^2-2a+13>0$ per ogni a, si ha che A ha tre autovalori

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{1}{2}(1+a-\sqrt{a^2-2a+13}), \lambda_3 = \frac{1}{2}(1+a+\sqrt{a^2-2a+13})$$

e si verifica facilmente che $\lambda_2 \neq 1, \lambda_3 \neq 1, \lambda_2 \neq \lambda_3$. Allora A ha tre autovalori distinti ed è dunque diagonalizzabile per ogni a.

Studiamo l'autospazio $V_1(F)$: esso è dato, nella base canonica, dalle soluzioni del sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cioè il sistema $\begin{cases} z=0 \\ x+y+(a-1)z=0 \end{cases}$, cioè $x=-y, z=0$ da cui una base di $V_1(A)$ è $\{E_1-E_2\}$. Ora, posto $\lambda=\lambda_2, \lambda_3$, studiamo l'autospazio $V_\lambda(A)$: esso è dato, nella base canonica, dalle soluzioni del sistema

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & a-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cioè il sistema $\begin{cases} (1-\lambda)x+2z=0 \\ (1-\lambda)y+z=0 \end{cases}$ (la terza equazione è superflua dato che λ è scelto in modo che il determinante sia nullo), quindi, per esempio, $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=\lambda-1 \end{cases}$.

Ne segue che una base di $V_{\lambda_2}(A)$ è $\{2E_1+E_2+(\lambda_2-1)E_3\}$, mentre una base di $V_{\lambda_3}(A)$ è $\{2E_1+E_2+(\lambda_3-1)E_3\}$. ■