UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GEOMETRIA 1

Seconda prova di esonero - a.a. 2002-2003

1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e $F : V \to V$ un'applicazione lineare.

(a) Si definiscano le nozioni di autovalore, autovettore ed diagonalizzabilità di F;

(b) Si enunci il risultato che da condizioni necessarie e sufficenti per la diagonalizzabilità di F;

(c) si dimostri tale risultato.

2. In uno spazio affine di dimensione 3 sia O, e_1, e_2, e_3, un riferimento affine. Sia $A(0,0,2)$ un punto e si considerino le due rette di equazioni cartesiane:

$$\mathcal{R}_1 : \begin{cases} 3X - Y - 1 = 0 \\ -3X - 2Y + 7 = 0 \end{cases}, \mathcal{R}_2 : \begin{cases} 3X - 4Y - 11 = 0 \\ X - 4Z - 1 = 0 \end{cases}.$$

(a) Esiste un piano che contiene tutte e due le rette?

(b) Determinare l'equazione cartesiana del piano affine p contenente $\mathcal{R}_1$ e parallelo a $\mathcal{R}_2$;

(c) Determinare tutti i punti $P \in p$ tali che la retta $\overline{PA}$ è incidente $\mathcal{R}_2$, ma non è incidente $\mathcal{R}_1$.

3. Siano U, V e W tre spazi vettoriali reali e siano $G : U \to V,\ F : V \to W$ due applicazioni lineari.

(a) Dimostrare che $G(N(F \circ G)) \subseteq N(F)$;

(b) se ora U è un sottospazio di V e G è l'inclusione di U in V, dimostrare che $N(F_{|U}) = N(F) \cap U$;

(c) trovare un esempio per il quale non vale l'uguaglianza in (a).

4. Sia a un numero reale e $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare tale che

$$F(E_3) = E_3, F(E_4) = aE_4, F(E_1 - E_3 - E_4) = E_1, F(E_2 - E_4) = aE_2,$$

dove $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.

(a) Determinare una matrice di F;

(b) trovare basi per gli autospazi di F;

(c) determinare i valori di a per i quali F è diagonalizzabile.

5. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $n \geq 1$, $F : V \to V$ un'applicazione lineare, $A \in M_n$ una matrice. Poniamo $r =$ rango di A, $p = \dim \mathrm{Im}(F)$.

(a) Dimostrare che, se $r \neq p$, allora non esiste una base $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ tale che A è la matrice di F nella base e;

(b) Dimostrare che, per ogni F fissata, esistono delle matrici $A \in M_n$ tali che $r = p$ ma non esiste una base $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ in cui A è la matrice di F.