UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GEOMETRIA 1

Prima prova di esonero - a.a. 2002-2003

1. Sia V uno spazio vettoriale reale.

(a) Si definiscano le nozioni di indipendenza lineare tra vettori di V e di dimensionedi V;

(b) Si enunci il teorema principale che relaziona la dipendenza o indipendenza lineare tra due insiemi di vettori di V ed il loro numero;

(c) si dimostri tale risultato.

2. Sia k un numero reale. Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ kx_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - kx_3 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases} .$$

Si determinino i valori di k per i quali il sistema è (o no) compatibile e, in tal caso, si calcolino esplicitamente le soluzioni.

3. Sia k un numero reale e si considerino le due matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Si determinino i valori di k per i quali A può essere trasformata in B con sole operazioni elementari;

(b) per i valori di k individuati sopra, si determini una sequenza di operazioni elementari che trasforma A in B.

4. Siano k un numero reale, $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ y - w = 0 \end{cases}$$

e $U_k \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale

$$U_k = < (2,2,1,2),\ (1,1,0,1),\ (3,3,1,k) > .$$

(a) Si determinino due basi di W e U_k;

(b) si determinino le dimensioni di $U_k + W$ e di $U_k \cap W$;

(c) si determinino (se esistono) i valori di k per i quali

$$U_k \oplus W = \mathbb{R}^4.$$

5. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e U, W_1, W_2 suoi sottospazi tali che $W_1 \not\subset W_2, W_2 \not\subset W_1$.

(a) Si dimostri che esiste una condizione, solo in termini di $\dim W_1$, $\dim W_2$, che implica che $U \subset W_1 + W_2$;

(b) si dimostri che esiste una condizione, diversa dalla precedente, in termini di $\dim W_1$, $\dim W_2$, $\dim U$, $\dim U \cap W_1$, $\dim U \cap W_2$, che implica che $U \subset W_1 + W_2$.

SOLUZIONI

1. (a) [Sernesi, Def. 4.4 e 4.14]. (b) e (c) [Sernesi, Teor. 4.12]. ■

2. Applichiamo per esempio il metodo di Kronecker-Rouchè-Capelli-Cramer: le matrici sono

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 2 & 0 & -k \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (A|b) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & k & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -k & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

A contiene il minore $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$, quindi $r(A) \geq 2$. Utilizzando il principio dei minori orlati si ha che $r(A) = 2$ se e solo se

$$\begin{vmatrix} 0 & k & 1 \\ 2 & 0 & -k \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -k^2 - 2k + 2 = 0$$

e

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -k \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2k + 2 = 0.$$

Dato che questi ultimi non sono nulli per gli stessi k ne segue che $r(A) = 3$ per ogni k. Allora $r((A|b)) \geq 3$ e, essendo $(A|b)$ una matrice 4×4, si avrà che $r((A|b)) = 3$ se e solo se

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & k & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -k & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3k - 6 = 0$$

cioè se e solo se $k = 2$. Per il teorema di Kronecker-Rouchè-Capelli [Sernesi, Teorema 5.7] si ha che il sistema è compatibile se e solo se $k = 2$. Per tale valore di k sappiamo allora per esempio che la seconda equazione è combinazione lineare delle altre, dunque il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ 2x_1 - 2x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}.$$

Per la regola di Cramer [Sernesi, Corollario 6.11], osservando che il determinante della matrice dei coefficenti è $2k + 2 = 6$, si ottiene allora l'unica soluzione

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{6} = \frac{1}{2}, \; x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{6} = -\frac{1}{2}, \; x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{6} = 1. \blacksquare$$

3. (a) Osserviamo prima che

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

e quindi che $r(B) = 3$. Dato che le operazioni elementari non alterano il rango [Sernesi, Proposizione 5.2] A può essere trasformata in B solo se A è invertibile.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = k^2 - k + 2 \neq 0$$

per ogni k. Quindi A è invertibile per ogni k, e, [Sernesi, Osservazione 3.2.8], potremo trovare operazioni elementari che trasformano A in I_3, e analogamente per B. Invertendo le operazioni elementari che trasformano B in I_3 si otterrà una sequenza di operazioni elementari che, per ogni k, trasforma A in B.

(b) Partiamo da A; scambiando R_1 e R_3 otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & k \\ 1 & k & 0 \end{pmatrix}.$$

Con l'operazione $R_3 \to R_3 - R_1$ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & k-1 & -2 \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_3 \to R_3 - (k-1)R_2$ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & -k^2+k-2 \end{pmatrix}.$$

Con $R_3 \to \frac{1}{-k^2+k-2}R_3$ si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e l'operazione $R_2 \to R_2 - kR_3$ da

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_1 \to R_1 - R_2$ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e l'operazione $R_1 \to R_1 - 2R_3$ da I_3.

Partiamo invece da B; scambiando R_1 con R_3 e poi R_2 con R_3 otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_2 \to R_2 - R_1$ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_2 \to R_2 - R_3$ si ottiene I_3. La sequenza di operazioni elementari che, per ogni k, trasforma A in B è dunque: scambio R_1 e R_3; $R_3 \to R_3 - R_1$; $R_3 \to R_3 - (k-1)R_2$; $R_3 \to \frac{1}{-k^2+k-2}R_3$; $R_2 \to R_2 - kR_3$; $R_1 \to R_1 - R_2$; $R_1 \to R_1 - 2R_3$; $R_2 \to R_2 + R_3$; $R_2 \to R_2 + R_1$; scambio R_2 e R_3; scambio R_1 e R_3. ■

4. (a) Sia $v = (x, y, z, w)$ un vettore di W. Allora $w = y, z = x$, quindi

$$v = (x, y, x, y) = x(1, 0, 1, 0) + y(0, 1, 0, 1).$$

Allora W è generato da $w_1 = (1, 0, 1, 0)$ e da $w_2 = (0, 1, 0, 1)$. Inoltre, essendo w_1, w_2 chiaramente linearmente indipendenti, ne segue che $\{w_1, w_2\}$ è una base di W.

Poniamo $u_1 = (2,2,1,2), u_2 = (1,1,0,1), u_3 = (3,3,1,k)$ e calcoliamo $\dim U_k = \text{rango}\{u_1, u_2, u_3\} = r(A)$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & k \end{pmatrix}.$$

Ora, o utilizzando il principio dei minori orlati, o semplicemente osservando che A ha due colonne uguali, si ha che $r(A) = 2$ se e solo se

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & k \end{vmatrix} = -k + 3 = 0,$$

quindi se e solo se $k = 3$. Ne segue che una base di U_k è $\{u_1, u_2, u_3\}$ se $k \neq 3$, mentre è $\{u_1, u_2\}$ se $k = 3$.

(b) Studiamo prima $U_k \cap W$: un vettore di U_k è sempre del tipo

$$u = au_1 + bu_2 + cu_3 = (2a + b + 3c, 2a + b + 3c, a + c, 2a + b + kc)$$

e tale vettore sta in W se e solo se

$$\begin{cases} 2a + b + 3c = a + c \\ 2a + b + 3c = 2a + b + kc \end{cases}$$

quindi se e solo se

$$\begin{cases} a + b + 2c = 0 \\ (k-3)c = 0 \end{cases}.$$

Se $k \neq 3$ si ha $c = 0, b = -a$, da cui $u = a(u_1 - u_2)$. Ne segue che $U_k \cap W$ ha dimensione 1 con base $\{u_1 - u_2\}$. Se $k = 3$, sappiamo già che $u_3 = u_1 + u_2$ e si ha invece $b = -a - 2c$, da cui $u = a(u_1 - u_2) + c(u_3 - 2u_2) = (a + c)(u_1 - u_2)$. Ne segue di nuovo che $U_k \cap W$ ha dimensione 1 con base $\{u_1 - u_2\}$. Ora, per la formula di Grassmann [Sernesi, Teorema 4.18], si ha

$$\dim(U_k + W) = \dim U_k + \dim W - \dim(U_k \cap W) = \begin{cases} 4 & \text{se } k \neq 3 \\ 3 & \text{se } k = 3 \end{cases}.$$

(c) Per quanto visto in (b) non accade mai che $U_k \cap W = \{0\}$, quindi per nessun k può accadere che $U_k \oplus W = \mathbb{R}^4$. ■

5. (a) Se esiste una condizione, solo in termini di $\dim W_1$, $\dim W_2$, che implica che

$U \subset W_1+W_2$, allora tale condizione dovrà essere indipendente da U. Se $W_1+W_2 \neq V$ allora preso un vettore $v \in V-(W_1+W_2)$ e scelto $U=<v>$ si avrà che $U \not\subset W_1+W_2$. Dunque affinchè sia $U \subset W_1+W_2$, indipendentemente da U, dovrà essere $W_1+W_2=V$. Osservato che $\dim(W_1+W_2) \leq \dim V$, si ha $W_1+W_2=V$ se e solo se $\dim(W_1+W_2) \geq \dim V$, e quindi, per la formula di Grassmann, se e solo se

$$\dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2) \geq \dim V.$$

Per ipotesi sappiamo che $W_1 \cap W_2 \neq W_i, i=1,2$, e quindi che
$\dim(W_1 \cap W_2) \leq \dim W_i - 1, i=1,2$. Allora

$$\dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2) \geq \dim W_1 + \dim W_2 - \dim W_i + 1 \geq \dim V$$

se e solo se

$$\dim W_1 + 1 \geq \dim V \quad \textit{oppure} \quad \dim W_2 + 1 \geq \dim V.$$

(b) Osserviamo che $U \subset W_1+W_2$ se e solo se $U \cap (W_1+W_2) = U$, quindi se e solo se $\dim[U \cap (W_1+W_2)] \geq \dim U$. Si verifica facilmente che vale l'inclusione

$$(U \cap W_1) + (U \cap W_2) \subset U \cap (W_1+W_2)$$

e quindi

$$\dim[U \cap (W_1+W_2)] \geq \dim[(U \cap W_1)+(U \cap W_2)] = \dim U \cap W_1 + \dim U \cap W_2 - \dim(U \cap W_1 \cap W_2).$$

Ma $\dim(U \cap W_1 \cap W_2) \leq \dim U$, da cui

$$\dim U \cap (W_1+W_2) \geq \dim U \cap W_1 + \dim U \cap W_2 - \dim U \geq \dim U$$

se e solo se

$$\dim U \cap W_1 + \dim U \cap W_2 \geq 2\dim U. \ \blacksquare$$