Forme bilineari

(1) Si determini la forma bilineare simmetrica

$$b : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$$

definite dalle seguenti condizioni (i) e (ii):
(i) $b(\overline{e}_1, \overline{e}_1) = b(\overline{e}_2, \overline{e}_2) = b(\overline{e}_3, \overline{e}_3) = 1$**.**
(ii) i vettori $\overline{e}_1 + \overline{e}_2$**,** $\overline{e}_1 + \overline{e}_3$**,** $\overline{e}_2 + \overline{e}_3$ **sono isotropi,**
Sia B **la matrice di** b **rispetto alla base canonica: si verifichi che** 2 **e' un autovalore di** B **e se ne calcoli l'autospazio. Si determini una base diagonalizzante di** b **che sia ortonormale rispetto al prodotto scalare euclideo standard.**

(2) Si consideri l'operatore lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ cosi' definito:

$$a(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3).$$

Si consideri poi la forma bilineare simmetrica $g : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ cosi' definita.

$$b(\overline{x}, \overline{y}) = x_2 y_1 + x_1 y_2 - x_2 y_3 - x_3 y_2.$$

Sia infine

$$h : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$$

la funzione cosi' definita: $h(\overline{x}, \overline{y}) = g(f(\overline{x}), f(\overline{y}))$. Si verifichi che h e' una forma bilineare simmetrica e si determini il rango e la segnatura di h.