Procedimento di Grahm–Schmidt

1) In $\mathbf{R}^4$ con il prodotto scalare standard si considerino i vettori $\overline{v}_1 = (0,0,1,0), \overline{v}_2 = (1,1,1,1), \overline{v}_3 = (2,1,0,1), \overline{v}_4 = (t,0,t,0)$. Si determini il valore di t per il quale il procedimento di Gram-Schmidt applicato a $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3, \overline{v}_4$ produce almeno un vettore nullo. Si applichi il procedimento in questo caso.

2) In $\mathbf{R}^4$ con il prodotto scalare standard si consideri la famiglia infinita di vettori

$$\overline{v}_n = \overline{a} + n\overline{b} + n^2\overline{c}, \quad n \geq 0$$

dove $\overline{a} = (0,0,1,0)$, $\overline{b} = (1,1,1,1)$, $\overline{c} = (2,1,0,1)$. Si applichi il procedimento di Gram-Schmidt e si detrmini quindi una base del sottospazio generato dalla famiglia dei vettori $\overline{v}_n, n \geq 0$.

3) Si applichi il procedimento di Gram-Schmidt alla seguente successione di vettori di $\mathbf{R}^4$:

$$\overline{v}_n = (n, n^2, n^3, n + n^2 + n^3), \quad n \geq 1.$$

4) In $\mathbf{R}^3$ con il prodotto scalare standard si consideri la famiglia infinita di vettori

$$\overline{v}_n = (n, n^2, n^3) \quad n \geq 1.$$

Utilizzando il procedimento di Gram-Schmidt si determini quindi una base dello spazio generato dalla famiglia dei vettori $\overline{v}_n, n \geq 1$.