GE2 - Tutorato I - Lunedì 30 settembre 2002

1. Stabilire quali fra le seguenti sono forme bilineari su $\mathbb{R}^3$ e di queste scrivere la matrice A che le rappresenta rispetto alla base canonica $E = (e_1, e_2, e_3)$. Sia poi $F = (e_1 + e_2, e_3, e_2 - e_3)$: scrivere la matrice B congruente ad A che rappresenta le forme bilineari nella nuova base F. ($x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$ rappresentano le coordinate dei vettori nella base canonica).

   (a) $< x, y >= x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 + x_1y_2$

   (b) $< x, y >= x_1 + x_2 + x_3$

   (c) $< x, y >= \sqrt{(x_1y_1)^2}$

   (d) $< x, y >= 5x_3y_2 + (x_2 + y_3)^2 - x_2^2 - y_3^2$

   (e) $< x, y >= c,\ c \in \mathbb{R}$

2. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false, giustificando le risposte:

   (a) In una forma bilineare degenere si può sempre trovare un vettore isotropo non nullo

   (b) Una forma bilineare non degenere non ha mai vettori isotropi non nulli

   (c) L'insieme dei vettori isotropi rispetto ad una forma bilineare costituisce un sottospazio vettoriale

   (d) Sia $v = v' + v''$ con $v' \| w$ e $v'' \perp w$ con v, v', v'', w vettori. Tale scrittura è unica

   (e) Sia b è una forma bilineare su $\mathbb{R}^n$. Esiste $v \in \mathbb{R}^n$ t.c. $v^\perp$ è un sottospazio di dim. n-2

   (f) Il comune prodotto scalare di $\mathbb{R}^n$ è una forma bilineare simmetrica priva di vettori isotropi e la forma quadratica associata è semplicemente la norma del vettore al quadrato.

3. Sia q la forma quadratica rappresentata nella base canonica $E = (e_1, e_2, e_3)$ di $\mathbb{R}^3$ da $Q(X) = 4X_1X_2 - 2X_1X_3 + 4X_2X_3 + X_2^2$

   (a) Scrivere la matrice A della forma bilineare simmetrica polare b associata a q

   (b) Verificare che il vettore $x_0 = (-1, 3, 2)$ non è b-isotropo

(c) Determinare due vettori y' e $y'' \in \mathbb{R}^3$ tali che $y' + y'' = e_2$ con $y' \| x_0$ e $y'' \perp x_0$

(d) Determinare equazioni cartesiane e parametriche di $e_2^\perp$ e due suoi generatori.

4. Sia $Q(X) = -2X_2^2$ l'espressione rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$ di una forma quadratica

   (a) Scrivere la matrice A della forma bilineare simmetrica polare b associata a q

   (b) Verificare che b è degenere e determinare un vettore non nullo $x_0 \in \mathbb{R}^2$ ortogonale ad ogni vettore $v \in \mathbb{R}^2$

   (c) Determinare l'insieme dei vettori isotropi di b.

5. Sia b una forma bilineare su $\mathbb{R}^n$. In ciascuno dei seguenti casi dire se può esistere una base F in cui b si rappresenta come l'usuale prodotto scalare (ovvero $b(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, dove x_i e y_i sono le $i-$esime coordinate rispetto alla base F rispett. dei vettori x e y)

   (a) $\exists u \in \mathbb{R}^n$ t.c. $b(u, u) = -1$

   (b) $\exists u, v \in \mathbb{R}^n$ t.c. $b(u, v) = -b(v, u)$

   (c) b ha rango $n - 1$

   (d) l'insieme dei vettori isotropi non nulli di b è non vuoto