GE2 - Tutorato X - Lunedì 9 dicembre 2002

1. Sia $\mathbb{E}^2$ un piano euclideo con riferimento cartesiano standard Oe_1e_2. Si consideri la conica $\mathcal{C}$ di equazione $5X^2-26XY+5Y^2+10X-26Y+77=0$.

   (a) Assicurarsi che $\mathcal{C}$ è un'iperbole non degenere

   (b) Trovare un'isometria (scrivendone le equazioni e specificandone la natura) che riduce l'iperbole nella sua forma canonica.

   (c) Trovare le coordinate del centro e dei fuochi, nonché le equazioni degli assi di simmetria e degli asintoti.

2. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $n+1$. Si definisce sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}(V)$ l'insieme $\mathbb{P}(W)$, dove W è un sottospazio vettoriale di V. Sia assegnata su V una base $\mathbb{E} = (e_0, ..., e_n)$, che definisce anche un riferimento proiettivo. Si dimostri che se W ha date equazioni cartesiane (in base $\mathbb{E}$), tali equazioni sono soddisfatte da tutte e sole le coordinate dei punti in $\mathbb{P}(W)$.

3. Rispondere alle seguenti domande (V è spazio vettoriale, W_1, W_2 sono sottospazi di V):

   (a) Uno spazio proiettivo è esso stesso uno spazio vettoriale?

   (b) Quale delle seguenti coordinate omogenee rappresenta il punto $[6, 3, 2]$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$? [1, 1/2, 1/3] ; [1,2,3]; [2,1,2/3]; [3,3/2,1]; [-6,3,-2]

   (c) Dimostrare che $W_1 \subset W_2 \iff \mathbb{P}(W_1) \subset P(W_2)$ e che $\mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2) = \mathbb{P}(W_1 \cap W_2)$

   (d) Siano $S_1 := \mathbb{P}(W_1)$, $S_2 := \mathbb{P}(W_2)$. Si definisce $L(S_1, S_2)$ come il più piccolo sottospazio proiettivo che contiene S_1 e S_2. Dimostrare che $L(S_1, S_2) = \mathbb{P}(W_1 + W_2)$

   (e) Con le notazioni del punto precedente, dimostrare la formula di Grassmann vettoriale: $\dim L(S_1, S_2) = \dim S_1 + \dim S_2$ - dim $S_1 \cap S_2$. Utilizzare tale formula per dimostrare che due iperpiani in $\mathbb{P}^n$ (cioè sottospazi di codimensione 1 - ad esempio le rette in $\mathbb{P}^2$) si intersecano sempre in un sottospazio proiettivo di dimensione almeno $n-2$.

4. Trovare equazioni delle rette in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ passanti per i seguenti punti:

   (a) $[1, 0, 0]$, $[0, 1, 0]$

(b) $[1, 0, 1]$, $[0, 1, 1]$

(c) $[1, 2, 2]$, $[3, 1, 4]$

Verificare che i punti $A = [1, 2, 2]$, $B = [3, 1, 4]$, $C = [2, -1, 2]$ di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ sono allineati e determinare l'equazione della retta che li contiene.