GE2 - Tutorato II - Lunedì 7 ottobre 2002

1. Rispondere alle seguenti domande (b è una forma bilineare simmetrica su V, $\mathbb{R}$-spazio vettoriale)

   (a) Se b è non nulla, può essere che tutti i vettori di V siano isotropi?

   (b) Siano $v, w \in V$. Sotto quali condizioni su u, v posso concludere che se $b(u, v) = 0$ allora u e v sono linearmente indipendenti?

   (c) Dire che b è un prodotto scalare equivale a dire che b non ha vettori isotropi?

   (d) Sia A la matrice di b in una certa base $\mathbb{E}$. E' vero che gli autovalori di A sono indipendenti dalla base scelta?

   (e) Se le colonne di una matrice A $n \times n$ formano una base ortonormale (rispetto al prodotto scalare standard), anche le righe lo fanno?

   (f) E'vero che il massimo numero di una matrice simmetrica definita positiva si trova sempre sulla diagonale?

2. Si determini la segnatura delle seguenti forme quadratiche su $\mathbb{R}^3$

   (a) $Q(X, Y, Z) = 2XY + 2YZ$

   (b) $Q(X, Y, Z) = Y^2 + 2XZ$

   (c) $Q(X, Y, Z) = X^2 + Y^2 + Z^2 + 2XY + 2XZ + 2YZ$

   (d) $Q(X, Y, Z) = 2X^2 + 2XY + Y^2 + +2XZ + 3Z^2$

3. Sia V un $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale euclideo (finito) con il prodotto scalare standard. Sia W un sottospazio di V non vuoto.

   (a) Dimostrare che $W^\perp$ è un sottospazio vettoriale.

   (b) Dimostrare che $W \cap W^\perp = \{0\}$

   (c) Utilizzando il teorema di Gram-Schmidt dimostrare che $V = W \oplus W^\perp$

   (d) Se $v = v' + v''$ con $v' \in W$ e $v'' \in W^\perp$ si definisca $P(v) = v'$. Dimostrare che P è un operatore lineare da V in V. P si dice operatore proiezione ortogonale di V su W

   (e) Sia ora $V = \mathbb{R}^3$ e W il sottospazio di equazioni cartesiane, rispetto alla base canonica $\mathbb{E}$, $x - y = 0$. Determinare la matrice di P rispetto ad $\mathbb{E}$.

(f) Determinare una base ortonormale di W e completarla fino ad ottenere una base ortonormale $\mathbb{F}$ di $\mathbb{R}^3$

(g) Scrivere la matrice di P in base $\mathbb{F}$.

4. Sia P lo spazio vettoriale reale dei polinomi di grado $\leq n$.

   (a) Siano $f, g \in P$. Dimostrare che $< f, g >= \int_{-1}^{1} f(x)g(x)$ è un prodotto scalare.

   (b) Sia $n = 3$. Trovare una base ortogonale di P.