

GE2 - Tutorato IV - Lunedì 21 ottobre 2002

- Usando il teorema spettrale diagonalizzare (trovando una base diagonalizzante) le seguenti forme quadratiche $q(X, Y, Z) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$:
 - $2XY - 2XZ + 4YZ$
 - $2X^2 + 2Y^2 + 2Z^2 + 2XY + 2XZ + 2YZ$
- Sia T un operatore lineare su V \mathbb{R} - spazio vett. euclideo. Dire se ognuna delle seguenti condizioni implica necessariamente $T = 0$
 - $\langle T(u), v \rangle = 0 \forall u, v \in V$
 - T è autoaggiunto e $\langle T(u), u \rangle = 0 \forall u \in V$
 - $\langle T(u), u \rangle = 0 \forall u \in V$
 - $\langle T(u), T(u) \rangle = 0 \forall u \in V$
- Sia V un \mathbb{R} - spazio vett. euclideo (di dim. finita). Mostrare che $\text{Im } T^t = (\text{Ker } T)^\perp$
- Sia V un \mathbb{R} - spazio vett. euclideo e T un operatore autoaggiunto. Mostrare che se esiste $n \in \mathbb{N}$ t.c. $T^n(v) = 0$ allora $v \in \text{Ker } T$
- Sia V un \mathbb{R} - spazio vettoriale di dimensione 2. E' assegnata su V la forma quadratica (rispetto alla base canonica) $q(x, y) = 2x^2 - 2xy + y^2$. Sia inoltre T un operatore lineare t.c. $T(e_1) = e_1 + 2e_2$ e $T(e_2) = 2e_1 + e_2$
 - Dimostrare che b , forma bilineare polare di q , definisce un prodotto scalare su V
 - T è un operatore simmetrico?
- Sia V un \mathbb{R} - spazio vett. euclideo di dimensione finita. Sia $l_v : V \rightarrow \mathbb{R}$ il funzionale lineare che ad ogni $w \in V$ associa $\langle w, v \rangle$. Dimostrare che l'applicazione $l : V \rightarrow V^*$ che manda $v \in V$ in $l_v \in V^*$ è un isomorfismo tra spazi vettoriali. Dedurre da questo che per ogni operatore F da V in V esiste, ed è unico, l'aggiunto di F .