Universitá degli Studi di Roma Tre - Dipartimento di Matematica
Corso di GE3 del Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2002/2003

Docente: Prof. M. Pontecorvo - Esercitatore: Dott. L. Di Marco - Tutori: L. Di Biagio, P. Tranquilli

Tutorato del 6/3/2003

1.1 Sia d una metrica su un insieme finito X. Dimostrare che d é topologicamente equivalente alla metrica discreta su X.

1.2 Dimostrare che ognuna delle seguenti è una distanza in $\mathbb{R}^n$:

$$d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) :=\| \mathbf{x} - \mathbf{y} \|;$$

$$d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|;$$

$$d_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \max_i \{|x_i - y_i|\}.$$

Dimostrare inoltre che su $\mathbb{R}^n$ le tre distanze d_1, d_2, d_3 sono topologicamente equivalenti.

1.3 Trovare tutte le topologie su un insieme $X = \{a, b, c\}$ costituito da tre elementi.

1.4 Sia $\{\mathcal{T}_i\}_{i \in I}$ una famiglia di topologie su un insieme X. Dimostrare che $\bigcap_{i \in I} \mathcal{T}_i$ è una topologia su X.
Dare invece un esempio di due topologie $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ su un insieme X tali che $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ non sia una topologia.

1.5 Si considerino su $\mathbb{R}$ le seguenti topologie:

$$\mathcal{T}_{cof} := \{A \subset \mathbb{R} : |\mathbb{R} - A| \lneq \infty\} \cup \{\emptyset\};$$

$$j_d := \{A \subset \mathbb{R} : \forall x \in A,\ \exists\, a, b \in \mathbb{R},\ a \lneq b,\ \textit{tale che } x \in [a, b) \subset A\};$$

$$j_{ds} := \{A \subset \mathbb{R} : \forall x \in A,\ \exists\, a, b \in \mathbb{R},\ a \leq b,\ \textit{tale che } x \in [a, b] \subset A\}.$$

Si consideri inoltre la topologia euclidea $\mathcal{T}_e$ su $\mathbb{R}$. Dimostrare che vale la segunte relazione tra le quattro topologie:

$$\mathcal{T}_{cof} \lneq \mathcal{T}_e \lneq j_d \lneq j_{ds}.$$

1.6 Sia $\mathcal{S} := \{(-\infty, a],\ \forall a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}, \emptyset\}$.
Verificare che $\mathcal{S}$ non è una topologia su $\mathbb{R}$.
Determinare la piú piccola topologia su $\mathbb{R}$ che contiene $\mathcal{S}$ (topologia generata da $\mathcal{S}$).