Universitá degli Studi di Roma Tre - Dipartimento di Matematica
Corso di GE3 del Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2002/2003

Docente: Prof. M. Pontecorvo - Esercitatore: Dott. L. Di Marco - Tutori: L. Di Biagio, P. Tranquilli

Tutorato del 12/3/2003

2.1 Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico discreto. Si consideri $\mathcal{A} = \{\{x\}\}_{x \in X}$ la famiglia di tutti i sottoinsiemi puntiformi di X.
Sia $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$, dimostrare che

$$\mathcal{B} \text{ è } base\ per\ \mathcal{T} \Leftrightarrow \mathcal{A} \subset \mathcal{B}.$$

2.2 Sia

$$\mathcal{B} := \{(a, b] : a, b \in \mathbb{Q},\ a < b\}.$$

(i) Verificare che $\mathcal{B}$ è una base di una topologia $\mathcal{T}$ su $\mathbb{R}$.

(ii) Verificare che $\mathcal{T}_e \lneq \mathcal{T} \lneq j_s$, dove $\mathcal{T}_e$ è la topologia euclidea e dove j_s è la topologia su $\mathbb{R}$ che ha come base gli intervalli limitati aperti a sinistra e chiusi a destra.

2.3 Sia $\mathcal{S} := \{(n, n+1], \forall n \in \mathbb{Z}\}$.

(i) Determinare la topologia $\mathcal{T}$ su $\mathbb{R}$ avente come base la famiglia delle intersezioni finite di elementi di $\mathcal{S}$.

(ii) Dimostrare che $\mathcal{T}$ è strettamente meno fine di j_s.

(iii) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, determinare un intorno U_a di a tale che per ogni altro intorno V_a di a si ha che $U_a \subset V_a$.

2.4 Sia $n \geq 2$ e sia $S(i; a, b) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : a < x_i < b\}$ la striscia ortogonale all'asse i-esimo di $\mathbb{R}^n$ ad estremi $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$.

(i) Verificare che $S(i; a, b) \in \mathcal{T}_e$ (topologia euclidea di $\mathbb{R}^n$).

(ii) Sia $\mathcal{S}$ l'insieme di tutte le strisce di $\mathbb{R}^n$, verificare che la famiglia $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ costituita da tutte le intersezioni finite di elementi di $\mathcal{S}$ è una base per la topologia euclidea $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_e)$.

2.5 Dato X insieme tale che $|X| \geq 3$. Sia $\mathcal{S} := \{X - \{x\}, \forall x \in X\}$.
Dimostrare che la famiglia delle intersezioni finite di elementi di $\mathcal{S}$ sono una base per lo spazio $(X, \mathcal{T}_{cof})$.

2.6 Dimostrare che gli spazi $(\mathbb{R}, j_d)$ e $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cof})$ non hanno una base numerabile di aperti.