Universitá degli Studi di Roma Tre - Dipartimento di Matematica
Corso di GE3 del Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2002/2003

Docente: Prof. M. Pontecorvo - Esercitatore: Dott. L. Di Marco - Tutori: L. Di Biagio, P. Tranquilli

Tutorato del 2/4/2003

5.1 Sia $(\mathbb{C}, \mathcal{T}_e)$ il piano complesso, e sia $\mathbf{S}^1 := \{a \in \mathbb{C} : |a| = 1\}$.
Si consideri $(S^1 - \{1\}, \mathcal{T}_e)$ come sottospazio topologico di $(\mathbb{C}, \mathcal{T}_e)$.
Dimostrare che

$$(S^1 - \{1\}, \mathcal{T}_e) \cong ((0,1), \mathcal{T}_e),$$

dove $([0,1), \mathcal{T}_e)$ è l'intervallo $(0,1)$ di $\mathbb{R}$ con la topologia indotta dalla retta euclidea.

5.2 Sia $S := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x,y < 1\}$. Trovare tre sottospazi $(X_i, \mathcal{T}_{X_i})$ di $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_e)$ che contengono S e tali che S in $(X_i, \mathcal{T}_{X_i})$ sia rispettivamente:

(i) aperto e chiuso;

(ii) chiuso ma non aperto;

(iii) aperto ma non chiuso.

5.3 Sia $(S, \mathcal{T}_S)$ un sottospazio topologico di $(X, \mathcal{T})$.

(i) Dare un esempio in cui D è un sottoinsieme denso in $(X, \mathcal{T})$, con $D \cap S \neq \emptyset$, e $D \cap S$ non è denso in $(S, \mathcal{T}_S)$.

(ii) Verificare che se D è un sottoinsieme denso in $(S, \mathcal{T}_S)$, D è denso in $(\overline{S}, \mathcal{T}_{\overline{S}})$.

5.4 Siano S_1, S_2 sottoinsiemi degli spazi topologici $(X_1, \mathcal{T}_1)$ e $(X_2, \mathcal{T}_2)$. Dimostrare che nel prodotto topologico $(X_1 \times X_2, \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2)$ si ha:

(i) $\overline{S_1 \times S_2} = \overline{S_1} \times \overline{S_2}$;

(ii) $\mathrm{Int}(S_1 \times S_2) = \mathrm{Int}(S_1) \times \mathrm{Int}(S_2)$;

(ii) $\mathrm{Fr}(S_1 \times S_2) = (\mathrm{Fr}(S_1) \times \overline{S_2}) \cup (\overline{S_1} \times \mathrm{Fr}(S_2))$.

5.5 Sia X un insieme infinito ed Y un insieme avente almeno due elementi. Siano $\mathcal{T}_{cof_X}$, $\mathcal{T}_{cof_Y}$, $\mathcal{T}_{cof_{X \times Y}}$ le topologie cofinite su X, Y ed $X \times Y$. Sia inoltre $\mathcal{T}$ la topologia prodotto di $(X, \mathcal{T}_{cof_X})$ per $(Y, \mathcal{T}_{cof_Y})$.
Verificare che $\mathcal{T}_{cof_{X \times Y}} \lneq \mathcal{T}$ in $X \times Y$.