

**Università degli Studi di Roma Tre - Dipartimento di Matematica**  
**Corso di GE3 del Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2002/2003**  
**Docente: Prof. M. Pontecorvo - Esercitatore: Dott. L. Di Marco - Tutori: L. Di Biagio, P. Tranquilli**

**Tutorato del 28/5/2003**

- 11.1** Sia  $X$  uno spazio topologico e sia  $\varphi : \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{I}$  un'applicazione continua tale che  $\varphi(0) = 1, \varphi(1) = 0$ . Dimostrare che per ogni arco  $f : \mathbf{I} \rightarrow X$  si ha  $f^{-1} \sim f \circ \varphi$  (dove  $f^{-1}(s) := f(1-s), s \in \mathbf{I}$ ).
- 11.2** Sia  $X$  uno spazio topologico e siano  $x_0, x_1 \in X$  e  $\alpha, \beta : \mathbf{I} \rightarrow X$  due archi tali che  $\alpha(0) = x_0 = \beta(0), \alpha(1) = x_1 = \beta(1)$ . Dimostrare che se  $\alpha \sim \beta$  allora  $\pi_\alpha = \pi_\beta$  (dove  $\pi_\alpha : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$ , definita da:  $\pi_\alpha([f]) = [\alpha^{-1} * f * \alpha]$ ).
- 11.3** Dimostrare che un sottospazio convesso  $V$  di  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_e)$  è semplicemente connesso (connesso per archi ed il gruppo fondamentale è quello banale).
- 11.4** Un sottoinsieme  $A$  di  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_e)$  si dice *stellato* se esiste un punto  $a_0 \in A$  tale che per ogni altro punto  $a \in A$  il segmento di estremi  $a, a_0$  è tutto contenuto in  $A$ .
- (i) Trovare un insieme stellato che non sia convesso.
  - (ii) Dimostrare che se  $A$  è stellato,  $A$  è semplicemente connesso.
- 11.5** Si consideri l'insieme dei numeri complessi  $\mathbb{C}$  e sia  $\mathcal{T}_e$  la topologia euclidea su  $\mathbb{C}$  (la topologia indotta dalla norma su  $\mathbb{C}$ ). Si consideri lo spazio topologico prodotto  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ . Si considerino le seguenti due rette in  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ :

$$r_1 := \{(x, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : y = 0\}$$

$$r_2 := \{(x, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : x = 0\}.$$

Sia  $T := r_1 \cup r_2$ .

- (i) Determinare  $\pi_1(T, (0, 0))$  (il gruppo fondamentale di  $T$  con punto base  $(0, 0)$ ).
- (ii) Determinare  $\pi_1(T, (1, 0))$ .
- (iii) Lo spazio  $T$  è semplicemente connesso?