PAC - 15 MAGGIO 2003

E 9. Metodo della trasformazione per v.a. continue.

1. *Esponenziale:* Simulare la v.a. continua X con densità

$$f(t) = \lambda\, e^{-\lambda t}\,, \qquad t \in [0, \infty)\,,$$

nei diversi casi $\lambda = 0.1, 1, 10$. Calcolare media e varianza empirica su un numero n di prove e confrontare graficamente con i valori teorici

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}\,, \quad \mathrm{Var}[X] = \frac{1}{\lambda^2}\,.$$

Si esegua poi la seguente verifica della legge dei grandi numeri. Su n lanci calcoliamo la funzione

$$f_n(\epsilon) = \mathbb{I}(|\sum_{k=1}^{n} Z_k| \geqslant n\epsilon)\,,$$

dove Z_k, $k = 1, \ldots, n$ sono copie indipendenti della variabile $X - \frac{1}{\lambda}$. Se ripetiamo l'esperimento un numero m di volte (per es. $m = 10^4$) otteniamo una successione di valori $f_n^1, f_n^2, \ldots, f_n^m$ e indichiamo con $u_{m,n}(\epsilon)$ la corrispondente media empirica. Graficando la $u_{m,n}(\epsilon)$ per diversi valori di $n >> 1$ e per es. $\epsilon = 0.01$ si osserverà che $u_{m,n}(\epsilon)$ si avvicina a 0 al crescere di n (per m fissato). Ciò è conseguenza della legge dei grandi numeri che assicura che per ogni $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|\sum_{k=1}^{n} Z_k| \geqslant n\epsilon) \to 0\,, \qquad n \to \infty\,.$$

2. *Cauchy:* Si ripeta l'esperimento proposto al punto 1 per la v.a. X con densità

$$f(t) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}\,, \qquad t \in (-\infty, \infty)\,.$$

Poiché la v.a. X (detta di Cauchy) non ha valor medio, $\mathbb{E}|X| = +\infty$, si osserverà che le misure non si stabilizzano. Inoltre si può osservare che i valori $u_{m,n}(\epsilon)$ calcolati come sopra (scegliendo questa volta le Z_k come copie indipendenti della X) non soddisfano $u_{m,n}(\epsilon) \to 0$, $n \to \infty$ cioè la v.a. di Cauchy viola la legge dei grandi numeri.

E 10. Simulazione di v.a. di Poisson.

Simulare variabili aleatorie di Poisson X^λ di parametro $\lambda > 0$, utilizzando la rappresentazione in termini di v.a. di legge esponenziale. Calcolare media empirica S_n e varianza empirica V_n su un numero di prove n sufficientemente grande, al variare di λ tra 0.1 e 1. Graficare i valori ottenuti e confrontare con i valori teorici $\mathbb{E}[X^\lambda] = \mathrm{Var}[X^\lambda] = \lambda$.

caputo@mat.uniroma3.it.

Suggerimenti

E 9. Il metodo della trasformazione può essere brevemente illustrato come segue. Sia X una v.a. continua con densità $f(t)$, $t \in [x_1, x_2] \subset \mathbb{R}$. La funzione di distribuzione associata è $F(x) = \mathbb{P}[X \leqslant x] = \int_{x_1}^{x} f(t)dt$. Pertanto si ha

$$\mathbb{P}\big[X \in [a,b]\big] = \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)\,, \quad x_1 \leqslant a \leqslant b \leqslant x_2\,. \tag{0.1}$$

Se Y è v.a. uniforme in $[0,1]$ allora la (0.1) equivale a $\mathbb{P}\big[Y \in [F(a), F(b)]\big]$. In particolare, se $F : [x_1, x_2] \to [0,1]$ è strettamente crescente allora abbiamo $\{X \in [a,b]\} \iff \{F(X) \in [F(a), F(b)]\}$ e la (0.1) stabilisce che la v.a. $Y = F(X)$ è distribuita uniformemente in $[0,1]$, qualunque sia la distribuzione di X. Invertendo F otteniamo che X è distribuita come $F^{-1}(Y)$. Quindi se si dispone di un'espressione esplicita per F^{-1} il metodo della trasformazione permette di simulare X calcolando $F^{-1}(Y)$ dove Y è uniforme in $[0,1]$. Nei casi proposti:

- se $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t \geqslant 0$ allora $F(x) = \int_0^x f(t)dt = 1 - e^{-\lambda x}$, $x \geqslant 0$. Quindi $F^{-1}(y) = -\frac{1}{\lambda}\log(1-y)$, $y \in (0,1)$.
- se $f(t) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $t \in \mathbb{R}$ si ha $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\mathrm{arctg}\, x$. Invertendo: $F^{-1}(y) = \mathrm{tg}\,[\pi(y - \frac{1}{2})]$, $y \in (0,1)$.

E 10. Ricordiamo che se $X_1, X_2, \ldots$ sono realizzazioni indipendenti di v.a. esponenziali di parametro 1, allora la rappresentazione

$$\begin{aligned} X^\lambda &= \inf\{k \geqslant 0 : \quad X_1 + \ldots X_{k+1} > \lambda\} \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \mathbb{I}(X_1 + \ldots X_\ell \leqslant \lambda) \end{aligned} \tag{0.2}$$

fornisce una v.a. di Poisson di parametro λ:

$$\mathbb{P}(X^\lambda = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!}\,, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Per la simulazione delle esponenziali X_i si utilizzi la rappresentazione $X = -\log Y$, con Y uniforme in $(0,1)$ (si veda **E9**). Il programma puó essere quindi realizzato tramite un semplice ciclo `do ... while` da arrestare non appena si realizza l'evento $X_1 + \ldots X_\ell > \lambda$.